

第1問

(1)

$A\left(a, \frac{a^2}{k}\right)$ とおく。ただし $a>0$ とする。このとき対称性から $B\left(-a, \frac{a^2}{k}\right)$ と置ける。ここで

線分OAが x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから

$$OA = \frac{\frac{a^2}{k}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3k}$$

と表せる。また

$$AB = a - (-a) = 2a$$

である。 $\triangle OAB$ が正三角形であることより $AB=OA$ であるから

$$2a = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3k}$$

$$\therefore a = \sqrt{3}k \quad (\because a>0)$$

となる。これより $A(\sqrt{3}k, 3k), B(-\sqrt{3}k, 3k)$ と求まる。 $\triangle OAB$ は正三角形であることより

重心と内心が一致する。重心の x, y 座標はそれぞれ

$$x = \frac{\sqrt{3}k - \sqrt{3}k + 0}{3} = 0$$

$$y = \frac{3k + 3k + 0}{3} = 2k$$

である。したがって中心Cの座標は $C(0, 2k)$ である。

(答) $C(0, 2k)$

(2)

円 S の半径を r とすると $\triangle OAB$ の面積について

$$\frac{1}{2}r(2\sqrt{3}k + 2\sqrt{3}k + 2\sqrt{3}k) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}k \cdot 3k$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}rk = 3\sqrt{3}k^2$$

$$\therefore r = k \quad (\because k>0)$$

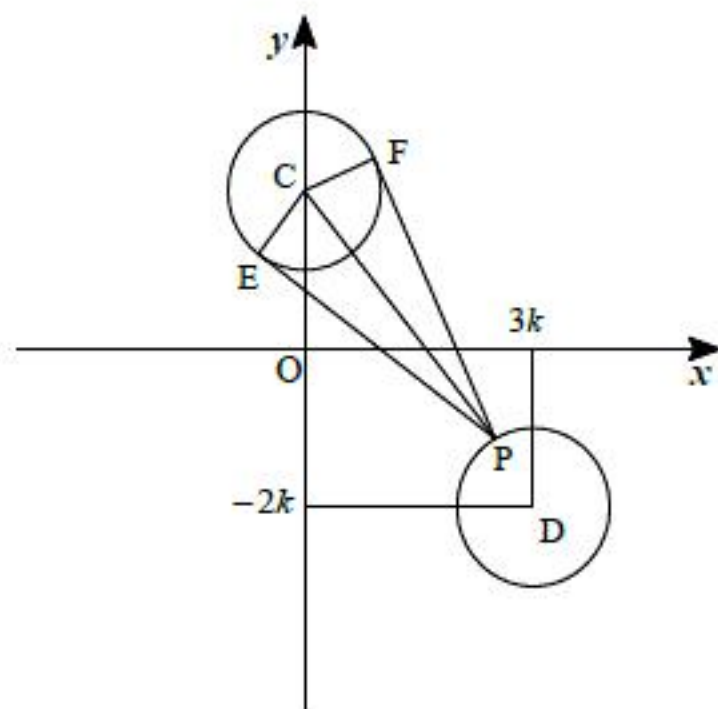
となる。したがって円 S は半径が k 中心が $C(0, 2k)$ の円であるからその方程式は

$$x^2 + (y - 2k)^2 = k^2$$

となる。

(答) $x^2 + (y - 2k)^2 = k^2$

(3)



$\angle ECF = 2\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} \overline{CE} \cdot \overline{CF} &= |\overline{CE}| |\overline{CF}| \cos 2\theta \\ &= |\overline{CE}| |\overline{CF}| (2\cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

と表せる。円 S の半径は k であるから $|\overline{CE}| = |\overline{CF}| = k$ である。また $\triangle CEP$ において

$$\cos \theta = \frac{CE}{CP} = \frac{k}{t}$$

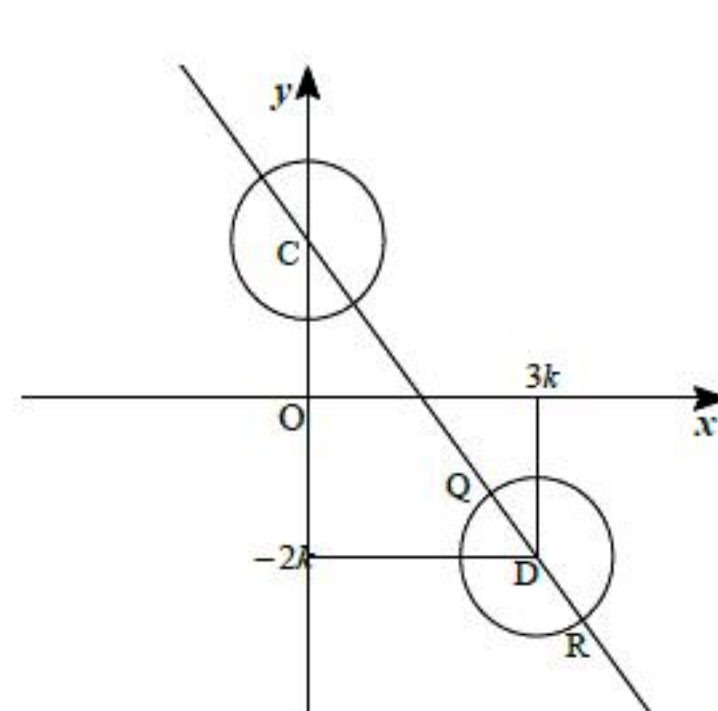
である。よって

$$\begin{aligned} \overline{CE} \cdot \overline{CF} &= |\overline{CE}| |\overline{CF}| (2\cos^2 \theta - 1) \\ &= k^2 \left(\frac{2k^2}{t^2} - 1 \right) \\ &= \frac{2k^4}{t^2} - k^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overline{CE} \cdot \overline{CF} = \frac{2k^4}{t^2} - k^2$

(4)



(3)の結果より $\overline{CE} \cdot \overline{CF} = \frac{2k^4}{t^2} - k^2$ である。よって $\overline{CE} \cdot \overline{CF}$ が最大・最小となるのは $t=CP$ がそ

れぞれ最小・最大となるときである。直線CDと円 T の交点のうちCに近い方の点をQ他方の点をRとする。このときCPが最大になるのはPがRに一致するときでありCPが最小になるのはPがQに一致するときである。直線CDの方程式は

$$y = \frac{-2k - 2k}{3k - 0}x + 2k$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + 2k$$

であり、円 T の方程式は

$$(x - 3k)^2 + (y + 2k)^2 = k^2$$

である。直線CDの式と円 T の式から y を消去すると

$$(x - 3k)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 2k + 2k\right)^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{16}{9}\right)(x - 3k)^2 - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\frac{5}{3}(x - 3k) - k\right\} \left\{\frac{5}{3}(x - 3k) + k\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{12k}{5}\right) \left(x - \frac{18k}{5}\right) = 0$$

$$\therefore x = \frac{18k}{5}, \frac{12k}{5}$$

となる。したがって $Q\left(\frac{12k}{5}, -\frac{6k}{5}\right), R\left(\frac{18k}{5}, -\frac{14k}{5}\right)$ となり、

$$CQ = \sqrt{\left(\frac{12k}{5}\right)^2 + \left(2k + \frac{6k}{5}\right)^2} = 4k$$

$$CR = \sqrt{\left(\frac{18k}{5}\right)^2 + \left(2k + \frac{14k}{5}\right)^2} = 6k$$

と表せる。よって、 $\overline{CE} \cdot \overline{CF}$ の最大値は

$$\frac{2k^4}{(4k)^2} - k^2 = -\frac{7}{8}k^2$$

であり最小値は

$$\frac{2k^4}{(6k)^2} - k^2 = -\frac{17}{18}k^2$$

となる。

(答) 最大値 $-\frac{7}{8}k^2$ 最小値 $-\frac{17}{18}k^2$

第2問

(1)

2 曲線 $y = -x^2 + 1$, $y = -(x-a)^2 + 1$ から y を消去すると

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= -(x-a)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 1 &= -x^2 + 2ax - a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 2a\left(x - \frac{a}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $a > 0$ であることより、これを解くと

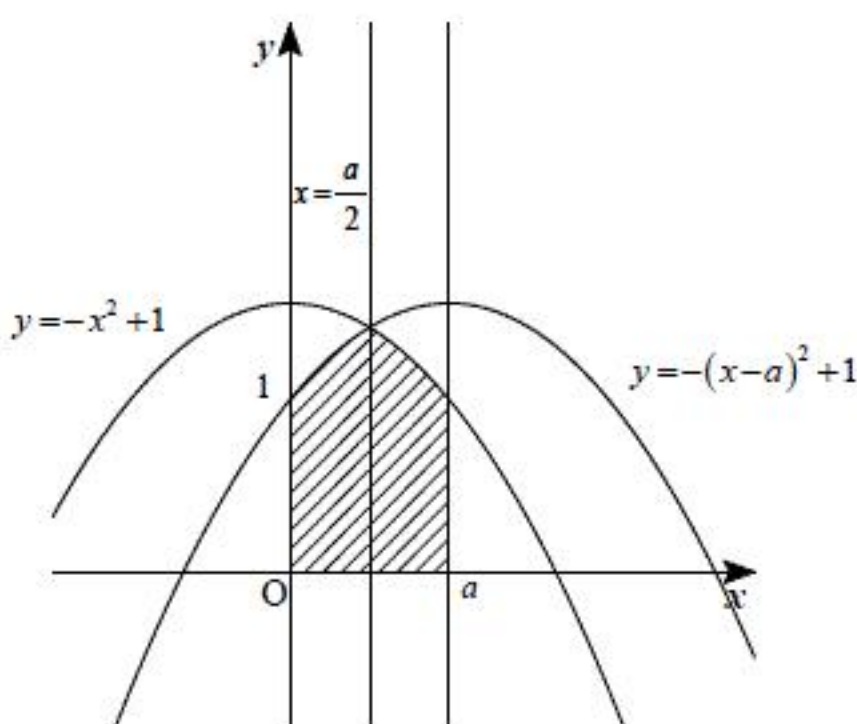
$$x = \frac{a}{2}$$

となる。したがって 2 曲線の交点の座標は $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + 1\right)$ となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + 1\right)$$

(2)

$S(a)$ は下図斜線部の領域の面積である。



図から分かるように、面積を求める図形は $x = \frac{a}{2}$ に関して対称である。したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \{-(x-a)^2 + 1\} dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}(x-a)^3 + x \right]_0^{\frac{a}{2}} \\ &= 2 \left(\frac{a^3}{24} + \frac{a}{2} - \frac{a^3}{3} \right) \\ &= -\frac{7}{12}a^3 + a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) S(a) = -\frac{7}{12}a^3 + a$$

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} S(a) &= S(1) \\ \Leftrightarrow -\frac{7}{12}a^3 + a &= \frac{5}{12} \\ \Leftrightarrow 7a^3 - 12a + 5 &= 0 \end{aligned}$$

となる。これは $a=1$ を解に持つから、因数定理より $(a-1)$ を因数として持つ。したがって

$$\begin{aligned} 7a^3 - 12a + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(7a^2 + 7a - 5) &= 0 \\ \therefore a &= 1, \frac{-7 \pm 3\sqrt{21}}{14} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $3\sqrt{21} = \sqrt{189}$ であるから、

$$\begin{aligned} 13 &< 3\sqrt{21} < 14 \\ \therefore \frac{3}{7} &< \frac{3\sqrt{21} - 7}{14} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるから、 $a = \frac{-7 + 3\sqrt{21}}{14}$ は $0 < a < 1$ を満たす。したがって求める a は

$$a = \frac{-7 + 3\sqrt{21}}{14}$$

である。

$$(\text{答}) a = \frac{-7 + 3\sqrt{21}}{14}$$

(4)

$S(a)$ を a で微分すると

$$\begin{aligned} S'(a) &= -\frac{7}{4}a^2 + 1 \\ &= -\frac{7}{4}\left(a^2 - \frac{4}{7}\right) \\ &= -\frac{7}{4}\left(a - \frac{2\sqrt{7}}{7}\right)\left(a + \frac{2\sqrt{7}}{7}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって $S(a)$ の増減表は以下ようになる。

a	0	...	$\frac{2\sqrt{7}}{7}$	...	1
$S'(a)$	$\searrow$	+	0	-	
$S(a)$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	

したがって $S(a)$ は $a = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ において最大となる。よって、最大値は

$$S\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{4\sqrt{7}}{21}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{4\sqrt{7}}{21}$$

第3問

(1)

区分求積法を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 \\ &= \int_0^1 x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

(i)

$S_n = \sum_{k=1}^n kr^{k-1}$ である。よって

$$\begin{aligned}rS_n &= \sum_{k=1}^n kr^k \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)r^{k-1}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}S_n - rS_n &= \sum_{k=1}^n kr^{k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)r^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \{k - (k-1)\} r^{k-1} - nr^n \\ &= \sum_{k=1}^n r^{k-1} - nr^n \\ &= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$

(ii)

(i)の結果より

$$S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

となる。したがって $0 < r < 1$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-r^n}{n(1-r)^2} - \frac{r^n}{1-r} \right) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(3)

$a > 0, b > 0$ より $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ と $a + b > 0$ は明らかである。また相加相乗平均の関係より

$$a + b - \sqrt{ab} > a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

となるので、 $a + b - \sqrt{ab} > 0$ である。ここで

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - (a^2 + b^2) \\ &= 2ab \\ &> 0\end{aligned}$$

$$\therefore (a+b)^2 > \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

である。 $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ かつ $a + b > 0$ であるのでこれより

$$a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$$

となる。一方

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 - \left(a+b-\sqrt{ab}\right)^2 &= a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 + ab - 2(a+b)\sqrt{ab} + 2ab) \\ &= 2(a+b)\sqrt{ab} - 3ab \\ &= 4\sqrt{ab} \left(\frac{a+b}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{ab} \right) \\ &> 4\sqrt{ab} \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right)\end{aligned}$$

となる。ここで相加相乗平均の関係を用いると

$$4\sqrt{ab} \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right) \geq 0$$

となる。したがって

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 > \left(a+b-\sqrt{ab}\right)^2$$

となる。 $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ 、 $a + b - \sqrt{ab} > 0$ であるのでこれより

$$a + b - \sqrt{ab} < \sqrt{a^2 + b^2}$$

となる。したがって以上より $a > 0, b > 0$ に対して

$$a + b - \sqrt{ab} < \sqrt{a^2 + b^2} < a + b$$

であることが示された。

(証明終)

(4)

(3)の結果において $a = \frac{1}{3^{k-1}} > 0, b = \frac{k^2}{n^3} > 0$ とすると

$$\frac{1}{3^{k-1}} + \frac{k^2}{n^3} - \sqrt{\frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{k^2}{n^3}} < \sqrt{\frac{1}{3^{2(k-1)}} + \frac{k^4}{n^6}} < \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{k^2}{n^3}$$

となる。各辺において $k = 1, 2, 3 \cdots n$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^{k-1}} + \frac{k^2}{n^3} - \sqrt{\frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{k^2}{n^3}} \right) < \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{3^{2(k-1)}} + \frac{k^4}{n^6}} < \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^{k-1}} + \frac{k^2}{n^3} \right) \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{3} \quad (\because (1) \text{の結果})$$

である。 $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと、 $0 < r < 1$ であり

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{k^2}{n^3}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n kr^{k-1} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kr^{k-1} = \frac{1}{n} S_n$$

となるから、

$$0 < \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{k^2}{n^3}} < \frac{1}{n} S_n$$

が成り立つ。ここで(2)の結果より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n = 0$ であるのでハサミウチの原理より

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{k^2}{n^3}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。以上の結果より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^{k-1}} + \frac{k^2}{n^3} - \sqrt{\frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{k^2}{n^3}} \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^{k-1}} + \frac{k^2}{n^3} \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

となる。したがって①にハサミウチの原理を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{3^{2(k-1)}} + \frac{k^4}{n^6}} = \frac{11}{6}$$

となる。

(答) $\frac{11}{6}$

第 4 問

(1)

行列 A, B の行列式を考えると

$$\begin{aligned}\det A &= \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) \\ &= 1 \neq 0 \\ \det B &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ &= -1 \neq 0\end{aligned}$$

となるから、行列 A, B はいずれも逆行列を持つ。

(証明終)

また、行列 A, B の逆行列は

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1-3\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ B^{-1} &= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-3\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$B^{-1}A^{-1}B$ を計算すると

$$\begin{aligned}B^{-1}A^{-1}B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-3\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

であり、これは原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させる一次変換の表現行列である。したがって

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1}B)^3 &= \begin{pmatrix} \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -E\end{aligned}$$

となる。ただし、 E は 2 次の単位行列である。

$$(\text{答}) \quad B^{-1}A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (B^{-1}A^{-1}B)^3 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$A^7BX=B$ の両辺に左から $B^{-1}(A^{-1})^7$ をかけると

$$\begin{aligned}X &= B^{-1}(A^{-1})^7 B \\ &= (B^{-1}A^{-1}B)^7\end{aligned}$$

となる。ここで $B^{-1}B=BB^{-1}=E$ となることを用いた。(2)の結果より $(B^{-1}A^{-1}B)^3=-E$ である

ことを用いると

$$\begin{aligned}X &= (B^{-1}A^{-1}B)^7 \\ &= (-E)^2(B^{-1}A^{-1}B) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4)

(2), (3)の結果を用いると $X^3=-E$ である。したがって

$$\begin{aligned}&E + X^3 + X^{10} + X^{15} + X^{20} + X^{25} \\ &= E + (X^3)X^2 + (X^3)^3X + (X^3)^5 + (X^3)^6X^2 + (X^3)^8X \\ &= E - X^2 - X - E + X^2 + X \\ &= O\end{aligned}$$

となる。

(証明終)