

第1問

(1)

$$f'(x) = -2x$$

より、 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -2a(x-a) - a^2 + 3 \\ &= -2ax + a^2 + 3 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $y = -2ax + a^2 + 3$

(2)

接線 ℓ の方程式に $y = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= -2ax + a^2 + 3 \\ \therefore x &= \frac{1}{2a}(a^2 + 3) \end{aligned}$$

となるから、

$$A\left(\frac{1}{2a}(a^2 + 3), 0\right)$$

である。また、接線 ℓ の方程式に $x = 0$ を代入すると、

$$y = a^2 + 3$$

となるから、

$$B(0, a^2 + 3)$$

である。したがって、 $\triangle OAB$ の面積 $S(a)$ は、 $a > 0$ に注意して、

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2a}(a^2 + 3)(a^2 + 3) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4a}(a^2 + 3)^2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S(a) = \frac{1}{4a}(a^2 + 3)^2$

(3)

$$S(a) = \frac{1}{4}\left(a^3 + 6a + \frac{9}{a}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{1}{4}\left(3a^2 + 6 - \frac{9}{a^2}\right) \\ &= \frac{3}{4a^2}(a^4 + 2a^2 - 3) \\ &= \frac{3}{4a^2}(a^2 + 3)(a^2 - 1) \\ &= \frac{3}{4a^2}(a^2 + 3)(a + 1)(a - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S''(a) &= \frac{1}{4}\left\{6a - (-2) \cdot \frac{9}{a^3}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(6a + \frac{18}{a^3}\right) \\ &= \frac{3}{2a^3}(a^4 + 3) \\ &> 0 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

と求まる。

$$\begin{aligned} S'(a) &= 0 \\ \therefore a &= 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} S(1) &= 4 \\ \lim_{a \rightarrow +0} S(a) &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{4}\left(a^3 + 6a + \frac{9}{a}\right) = +\infty \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}\left(a^3 + 6a + \frac{9}{a}\right) = +\infty \end{aligned}$$

であるから、増減表は下記のとおりである。

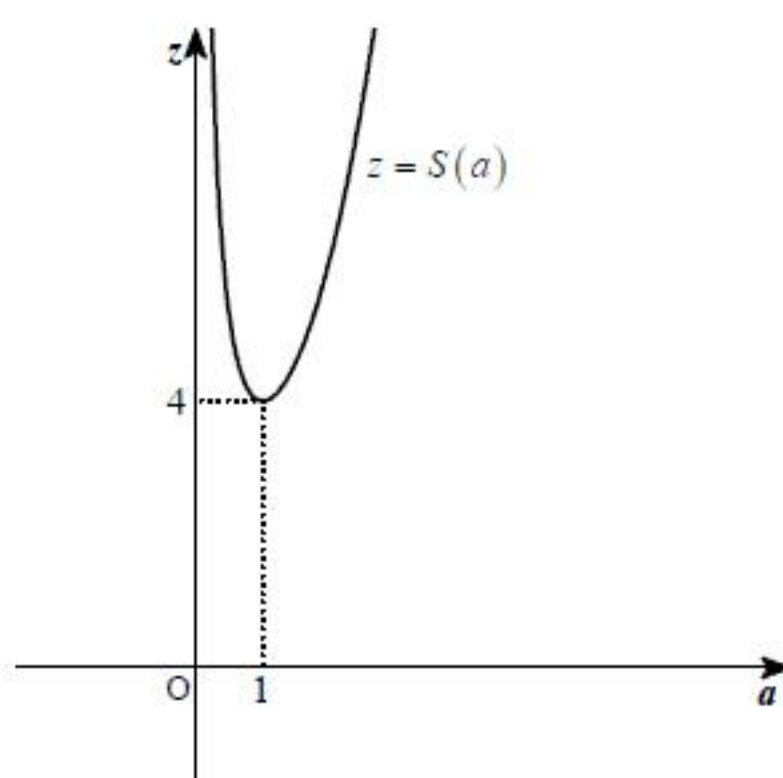
a	(0)	...	1	...	$(+\infty)$
$S'(a)$		-	0	+	
$S''(a)$		+		+	
$S(a)$	$(+\infty)$		4		$(+\infty)$

したがって、 $S(a)$ は下凸のグラフである。

(答) 前図参照

(4)

(3)より、グラフの概形は下図の通りである。



(答) 前図参照

第 2 問

(1)

$x \geq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (1-t)e^{-t} dt \\ &= \int_0^x e^{-t} dt - \int_0^x te^{-t} dt \\ &= \left[-e^{-t}\right]_0^x - \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x e^{-t} dt \\ &= -e^{-x} + 1 + xe^{-x} - \left[-e^{-t}\right]_0^x \\ &= -e^{-x} + 1 + xe^{-x} + e^{-x} - 1 \\ &= xe^{-x} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $F(x) = xe^{-x}$

(2)

$$F'(x) = f(x) = (1-x)e^{-x}$$

である。 $e^{-x} > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} F'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

である。したがって、 $F(x)$ の増減表は下記の通りである。

x	0	⋯	1	⋯
$F'(x)$		+	0	-
$F(x)$		↗		↘

したがって、 $F(x)$ は

$$x=1 \text{ のとき, 最大値 } \frac{1}{e}$$

をとる。

(答) 最大値: $\frac{1}{e}$ ($x=1$ のとき)

(3)

$f(x)$ は、 $0 \leq x \leq 1$ のとき、

$$f(x) \geq 0$$

であり、 $x > 1$ のとき、

$$f(x) < 0$$

である。したがって、 x の値で場合分けをして $G(x)$ を求める。

[1] $0 \leq x \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x |f(t)| dt \\ &= \int_0^x f(t) dt \\ &= F(x) \\ &= xe^{-x} \end{aligned}$$

と求まる。

[2] $x > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x |f(t)| dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x \{-f(t)\} dt \\ &= F(1) - \left(\int_0^x f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \right) \\ &= F(1) - F(x) + F(1) \\ &= 2F(1) - F(x) \\ &= \frac{2}{e} - xe^{-x} \end{aligned}$$

と求まる。

[1], [2]より、

$$G(x) = \begin{cases} xe^{-x} & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{e} - xe^{-x} & (x > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と求まる。

(答) $G(x) = \begin{cases} xe^{-x} & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{e} - xe^{-x} & (x > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$