

第1問

カードの取り出し方は 8^4 (通り)存在し、これらは同様に確からしい。

- (1) $a+b+c+d=6$ を満たす、数字の組み合わせは

- (Ⅰ) 1のカードが3枚と、3のカードが1枚の場合
(Ⅱ) 1のカード2枚と、2のカード2枚の場合

のいずれかの場合である。それぞれのカードを取り出す順番を考えると条件を満たす場合の数は

$${}_4C_1+_4C_2=10 \text{ (通り)}$$

となる。したがって求める確率は

$$\frac{10}{8^4}=\frac{5}{2048}$$

である。

(答) $\frac{5}{2048}$

- (2) $abcd$ が奇数であるための必要十分条件は a, b, c, d が全て奇数であることである。1から8の数字の中に奇数は4つある。したがって条件を満たすようなカードの取り出し方の場合の数は 4^4 (通り)である。よって求める確率は

$$\frac{4^4}{8^4}=\frac{1}{16}$$

となる。

(答) $\frac{1}{16}$

- (3) 余事象の確率、すなわち $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \neq 0$ となる確率を考える
 $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \neq 0$ となるための必要十分条件は a, b, c, d がいずれも1でないことである。したがってこれを満たすカードの取り出し方の場合の数は 7^4 (通り)である。よって余事象の確率は $\frac{7^4}{8^4}$ である。ゆえに求める確率は

$$1-\frac{7^4}{8^4}=\frac{1695}{4096}$$

となる。

(答) $\frac{1695}{4096}$

- (4) 与えられた条件式を同値変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab}+\frac{2}{cd}&=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2cd+4ab&=abcd \\ \Leftrightarrow (ab-2)(cd-4)&=8 \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 a, b, c, d は自然数なので $ab-2, cd-4$ はいずれも整数である。ただし

$$ab-2 \geq -1 \quad \text{かつ} \quad cd-4 \geq -3$$

となるので $ab-2, cd-4$ が $\textcircled{1}$ を満たし、かつ両方とも負になることはない。したがって $\textcircled{1}$ を満たすような整数 $ab-2, cd-4$ の組は以下ようになる。

$$(ab-2, cd-4)=(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$$

これより $\textcircled{1}$ を満たす整数組 (ab, cd) は

$$(ab, cd)=(3, 12), (4, 8), (6, 6), (10, 5)$$

となる。 (ab, cd) の値によって場合分けする。

- [1] $(ab, cd)=(3, 12)$ のとき
 $ab=3$ を満たすのは $(a, b)=(1, 3), (3, 1)$ の2通りであり、 $cd=12$ を満たすのは $(c, d)=(2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)$ の4通りである。 (a, b) と (c, d) の選び方は互いに影響しあわないので、 $(ab, cd)=(3, 12)$ となる場合の数は $2 \cdot 4=8$ (通り)である。
- [2] $(ab, cd)=(4, 8)$ のとき
 $ab=4$ を満たすのは $(a, b)=(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ の3通りであり、 $cd=8$ を満たすのは $(c, d)=(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$ の4通りである。 (a, b) と (c, d) の選び方は互いに影響しあわないので、 $(ab, cd)=(4, 8)$ となる場合の数は $3 \cdot 4=12$ (通り)である。
- [3] $(ab, cd)=(6, 6)$ のとき
 $ab=6$ を満たすのは $(a, b)=(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$ の4通りである。また同様にして $cd=6$ を満たす (c, d) の数も4通りである。 (a, b) と (c, d) の選び方は互いに影響しあわないので、 $(ab, cd)=(6, 6)$ となる場合の数は $4 \cdot 4=16$ (通り)である。
- [4] $(ab, cd)=(10, 5)$ のとき
 $ab=10$ を満たすのは $(a, b)=(2, 5), (5, 2)$ の2通りであり、 $cd=5$ を満たすのは $(c, d)=(1, 5), (5, 1)$ の2通りである。 (a, b) と (c, d) の選び方は互いに影響しあわないので、 $(ab, cd)=(10, 5)$ となる場合の数は $2 \cdot 2=4$ (通り)である。

以上[1], [2], [3], [4]より求める確率は

$$\frac{8+12+16+4}{8^4}=\frac{5}{512}$$

となる。

(答) $\frac{5}{512}$

第2問

(1)

数学的帰納法を利用して不等式

$$-\frac{1}{4} \leq a_n < 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

を示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = -\frac{1}{4} \text{ であるから, } n=1 \text{ において } \textcircled{1} \text{ は成り立っている。}$$

[2] $n=k$ において①が成り立つと仮定したとき

帰納法の仮定より

$$-\frac{1}{4} \leq a_k < 0$$

であるから

$$0 < a_k^2 \leq \frac{1}{16} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで漸化式より

$$a_{k+1} = a_k^2 - \frac{1}{4}$$

であるから、これと②より

$$-\frac{1}{4} < a_{k+1} \leq -\frac{3}{16} < 0$$

となる。したがって①は $n=k+1$ においても成立する。

以上[1], [2]より $n=1, 2, 3, \dots$ に対して不等式

$$-\frac{1}{4} \leq a_n < 0$$

が成立する。

(証明終)

(2)

$$a_{n+1} = a_n^2 - \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

とする。数学的帰納法を利用して、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して不等式

$$a_{2n-1} < a_{2n+1} \quad \dots \textcircled{4}$$

を示す。

[1] $n=1$ のとき

③より

$$a_2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16}$$

$$a_3 = \left(-\frac{3}{16}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{55}{256}$$

である。ここで

$$a_1 = -\frac{1}{4} = -\frac{64}{256}$$

であるので

$$a_1 < a_3$$

となる。したがって④は $n=1$ において成立する。

[2] $n=k$ において④が成り立つと仮定したとき

③より

$$a_{2k+3} = a_{2k+2}^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \left(a_{2k+1}^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

である。同様にして

$$a_{2k+1} = \left(a_{2k-1}^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

である。これらより

$$\begin{aligned} a_{2k+3} - a_{2k+1} &= \left(a_{2k+1}^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - \left[\left(a_{2k-1}^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \\ &= \left(a_{2k+1}^2 - \frac{1}{4} + a_{2k-1}^2 - \frac{1}{4}\right) \left(a_{2k+1}^2 - \frac{1}{4} - a_{2k-1}^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(a_{2k+1}^2 + a_{2k-1}^2 - \frac{1}{2}\right) (a_{2k+1} + a_{2k-1}) (a_{2k+1} - a_{2k-1}) \end{aligned}$$

となる。ここで(1)の結果より

$$a_{2k+1} + a_{2k-1} < 0$$

$$a_{2k+1}^2 + a_{2k-1}^2 - \frac{1}{2} < 0$$

であり、帰納法の仮定より

$$a_{2k+1} - a_{2k-1} > 0$$

である。したがって

$$a_{2k+3} - a_{2k+1} = \left(a_{2k+1}^2 + a_{2k-1}^2 - \frac{1}{2}\right) (a_{2k+1} + a_{2k-1}) (a_{2k+1} - a_{2k-1}) > 0$$

となる。よって④は $n=k+1$ においても成り立つ。

以上[1], [2]により $n=1, 2, 3, \dots$ に対して不等式

$$a_{2n-1} < a_{2n+1}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

③より

$$a_{2n+2} = a_{2n+1}^2 - \frac{1}{4}$$

$$a_{2n} = a_{2n-1}^2 - \frac{1}{4}$$

である。したがって

$$a_{2n+2} - a_{2n} = a_{2n+1}^2 - \frac{1}{4} - a_{2n-1}^2 + \frac{1}{4}$$

$$= (a_{2n+1} + a_{2n-1}) (a_{2n+1} - a_{2n-1})$$

となる。(1), (2)の結果より

$$a_{2n+1} + a_{2n-1} < 0$$

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} > 0$$

である。したがって

$$a_{2n+2} - a_{2n} = (a_{2n+1} + a_{2n-1}) (a_{2n+1} - a_{2n-1}) < 0$$

$$\therefore a_{2n+2} < a_{2n}$$

となる。

(証明終)

(4)

数学的帰納法を利用して、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して不等式

$$0 < a_{2n} - a_{2n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)} \quad \dots \textcircled{5}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_2 - a_1 = -\frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2(1+1)}$$

となるので⑤は $n=1$ において成り立っている。

[2] $n=k$ において⑤が成り立つと仮定したとき

③より

$$a_{2k+2} - a_{2k+1} = a_{2k+1}^2 - \frac{1}{4} - \left(a_{2k}^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= (a_{2k+1} - a_{2k}) (a_{2k+1} + a_{2k})$$

である。同様にして

$$a_{2k+1} - a_{2k} = (a_{2k} - a_{2k-1}) (a_{2k} + a_{2k-1})$$

であるから、

$$a_{2k+2} - a_{2k+1} = (a_{2k+1} + a_{2k}) (a_{2k} - a_{2k-1}) (a_{2k} + a_{2k-1})$$

と表せる。ここで(1)の結果より

$$(a_{2k+1} + a_{2k}) (a_{2k} + a_{2k-1}) > 0$$

であり、帰納法の仮定より

$$a_{2k} - a_{2k-1} > 0$$

である。したがって

$$a_{2k+2} - a_{2k+1} = (a_{2k+1} + a_{2k}) (a_{2k} - a_{2k-1}) (a_{2k} + a_{2k-1}) > 0$$

である。一方、(1)の結果と、帰納法の仮定より

$$a_{2k+2} - a_{2k+1} = (a_{2k+1} + a_{2k}) (a_{2k} + a_{2k-1}) (a_{2k} - a_{2k-1})$$

$$\leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) (a_{2k} - a_{2k-1})$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2(k+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2(k+2)}$$

となる。よって以上より

$$0 < a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2(k+2)}$$

となる。したがって⑤が $n=k+1$ においても成り立つことが示された。

以上[1], [2]より $n=1, 2, 3, \dots$ に対して不等式

$$0 < a_{2n} - a_{2n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

第3問

(1)

和と定積分は順番を逆にすることが出来ることに注意すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(x) dx &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{2k-2} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{2k-2} dx \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^{k-1} \left[\frac{1}{2k-1} x^{2k-1} \right]_0^1 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\end{aligned}$$

となる。したがって題意は示された。

(証明終)

(2)

$x = \tan \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) と置くと、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で x と θ は1対1に対応する。積分範囲は下表のように対応する。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

また $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{4}$

(3)

右辺を計算すると

$$\begin{aligned}f(x) - R(x) &= \frac{1 - (-1)^n x^{2n}}{1+x^2} \\ &= \frac{1 - (-x^2)^n}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \{1 - (-x^2)\} \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-x^2)^{n-1}\} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-x^2)^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{2k-2} \\ &= S(x)\end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(4)

任意の連続関数 $h(x)$ に対して $\left| \int_0^1 h(x) dx \right| \leq \int_0^1 |h(x)| dx$ であるので、

$$\left| \int_0^1 R(x) dx \right| \leq \int_0^1 |R(x)| dx \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ であるので

$$|R(x)| = \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$$

である。したがって両辺を $0 \leq x \leq 1$ の範囲において積分すると

$$\int_0^1 |R(x)| dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①, ②より

$$\left| \int_0^1 R(x) dx \right| \leq \frac{1}{2n+1}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(5)

無限級数 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ の第 n 部分和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

である。したがって(1)の結果より $S_n = \int_0^1 S(x) dx$ である。よって(2), (3)の結果を用いると

$$\begin{aligned}S_n &= \int_0^1 \{f(x) - R(x)\} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 R(x) dx \\ \therefore S_n - \frac{\pi}{4} &= - \int_0^1 R(x) dx\end{aligned}$$

となる。これと(4)の結果を合わせると

$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| = \left| \int_0^1 R(x) dx \right| \leq \frac{1}{2n+1}$$

となる。ここで右辺において、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$\frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。したがってハサミウチの原理より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。 S_n が無限級数 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ の第 n 部分和であることより

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

となる。

(答) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

第4問

(1)

行列 A, B の行列式を考えると

$$\begin{aligned}\det A &= \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) \\ &= 1 \neq 0 \\ \det B &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ &= -1 \neq 0\end{aligned}$$

となるから、行列 A, B はいずれも逆行列を持つ。

(証明終)

また、行列 A, B の逆行列は

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1-3\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ B^{-1} &= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-3\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$B^{-1}A^{-1}B$ を計算すると

$$\begin{aligned}B^{-1}A^{-1}B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-3\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

であり、これは原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させる一次変換の表現行列である。したがって

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1}B)^3 &= \begin{pmatrix} \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -E\end{aligned}$$

となる。ただし、 E は 2 次の単位行列である。

$$(答) \quad B^{-1}A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (B^{-1}A^{-1}B)^3 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$A^7BX=B$ の両辺に左から $B^{-1}(A^{-1})^7$ をかけると

$$\begin{aligned}X &= B^{-1}(A^{-1})^7B \\ &= (B^{-1}A^{-1}B)^7\end{aligned}$$

となる。ここで $B^{-1}B=BB^{-1}=E$ となることを用いた。(2)の結果より $(B^{-1}A^{-1}B)^3=-E$ である

ことを用いると

$$\begin{aligned}X &= (B^{-1}A^{-1}B)^7 \\ &= (-E)^2(B^{-1}A^{-1}B) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4)

(2), (3)の結果を用いると $X^3=-E$ である。したがって

$$\begin{aligned}&E + X^5 + X^{10} + X^{15} + X^{20} + X^{25} \\ &= E + (X^3)X^2 + (X^3)^3X + (X^3)^5 + (X^3)^6X^2 + (X^3)^8X \\ &= E - X^2 - X - E + X^2 + X \\ &= O\end{aligned}$$

となる。

(証明終)