

〔1〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} &= \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} - 3 \\ &= \frac{(x+y+z)(yz+zx+xy)}{xyz} - 3 \\ &= \frac{4 \cdot 6}{9} - 3 \\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{3}$$

(2)

直線 $y = \sqrt{3}x + b$ は辺 AB に平行であるから、相似比と面積比の関係より、直線 $y = \sqrt{3}x + b$ は辺 AC および辺 BC を $(\sqrt{2}-1):1$ に内分する点を通ればよい。 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ であるから、辺 AC を $(\sqrt{2}-1):1$ に内分する点は

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

である。また、辺 BC を $(\sqrt{2}-1):1$ に内分する点は、

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 1 - \sqrt{2} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

である。したがって

$$b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

(3)

平面 $z=4$ と球面 S の中心 $(1, 2, 1)$ の距離は3なので、 S の半径は3である。従って球面 S の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$$

である。

$$(\text{答}) \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$$

〔2〕

(1)(i)

直線 l と曲線 C が接するとき、2 次方程式

$$2x = ax^2 + 1 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

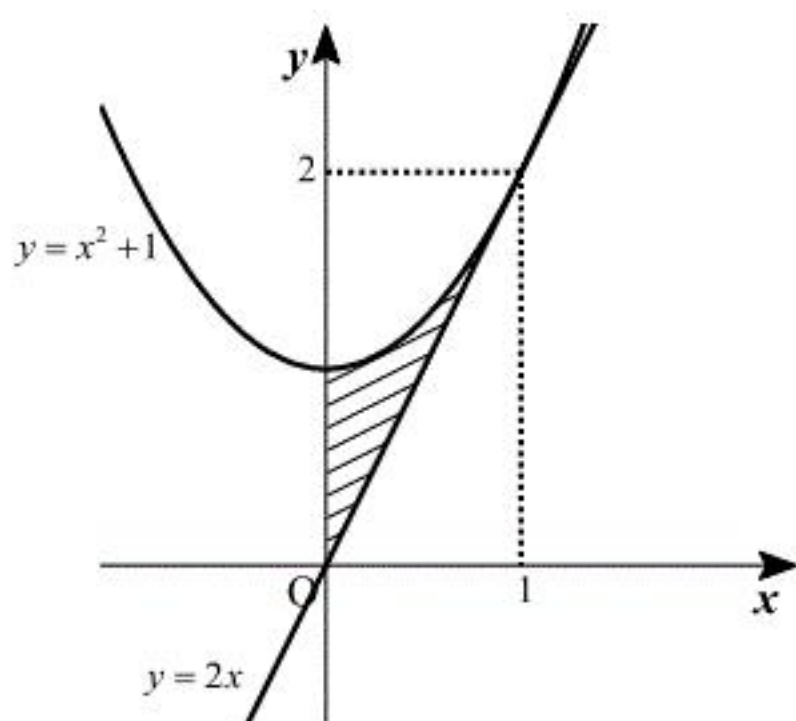
は重解を持つ。よって、①の判別式の値を D とおくと

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) 1

(ii)



$a = 1$ のとき直線 l と曲線 C は上図のようになり、求める面積は上図の斜線部の面積なので

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 1 - 2x) dx &= \int_0^1 (x - 1)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x - 1)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)(i)

①が相異なる 2 実数解を持つので

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 - a &< 0 \\ \Leftrightarrow a &< 1 \end{aligned}$$

であり、また $0 < a$ であるから $0 < a < 1$ である。

(答) $0 < a < 1$

(ii)

α, β は①の 2 実数解なので、 $\alpha < \beta$ とあわせて

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}, \beta = \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$$

である。

$$(答) \quad \alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}, \beta = \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} \alpha &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{(1 - \sqrt{1 - a})(1 + \sqrt{1 - a})}{a(1 + \sqrt{1 - a})} \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{a(1 + \sqrt{1 - a})} \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - a}} \\ &= \frac{1}{2} \\ \lim_{a \rightarrow +0} \beta &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$(答) \quad \lim_{a \rightarrow +0} \alpha = \frac{1}{2}, \lim_{a \rightarrow +0} \beta = +\infty$$

[3]

(1)

△OAB, △OBC, △OCAは一辺の長さ2の正三角形なので

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$$

$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\frac{\pi}{3}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) \\&=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB \\&=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} \\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。同様に

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\vec{c}&=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC \\&=\frac{1}{2} \\ \vec{c}\cdot\vec{a}&=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos\angle COA \\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \\&=\vec{a}+\vec{b} \\ \overrightarrow{OI}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}) \\&=\vec{c}+\vec{a} \\ \overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD} \\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) \\&=\vec{b}-\vec{a} \\ \overrightarrow{DI}&=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OD} \\&=\vec{c}+\vec{a}-\vec{a} \\&=\vec{c}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OG}=\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{OI}=\vec{c}+\vec{a}, \overrightarrow{DE}=\vec{b}-\vec{a}, \overrightarrow{DI}=\vec{c}$$

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DI}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c} \\&=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a} \\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\&=0\end{aligned}$$

より, $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{DI}$ である。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OJ}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}) \\&=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}+\vec{b})\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DJ}&=\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OD} \\&=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}+\vec{b})-\vec{a} \\&=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}+\vec{b})\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DI})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})$$

である。よって $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DI})$ である。また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{DE}&=(\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OF})\cdot\overrightarrow{DE} \\&=\left\{\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) \\&=\frac{1}{2}\left(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \\&=\frac{1}{2}\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) \\&=0 \\ \overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{DI}&=(\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OF})\cdot\overrightarrow{DI} \\&=\left\{\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right\}\cdot\vec{c} \\&=\frac{1}{2}\left(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{c}|^2\right) \\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right) \\&=0\end{aligned}$$

より, $\overrightarrow{FJ}\perp\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FJ}\perp\overrightarrow{DI}$ である。

(証明終)

(5)

(4)の結果より, 点Jは線分EIの中点であり, また $\overrightarrow{FJ}$ は△DEIに垂直である。従って△DEIの面積をSとおくと四面体FDEIの体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S\cdot|\overrightarrow{FJ}|&=\frac{1}{6}|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DI}||\overrightarrow{FJ}| \quad (\because (3)) \\&=\frac{1}{6}|\vec{a}-\vec{b}||\vec{c}|\left|\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\right| \\&=\frac{1}{12}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}\cdot 1\cdot\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}} \\&=\frac{1}{12}\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{2}+1}\sqrt{1+1+1+2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}} \\&=\frac{\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \frac{\sqrt{2}}{12}$$

〔4〕

(1)

f によって点 $(1, \sqrt{3})$ が点 $(d, \sqrt{3}d)$ に移されるので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d \\ \sqrt{3}d \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + \sqrt{3}b = d \\ b + \sqrt{3}c = \sqrt{3}d \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = d - \sqrt{3}b \\ c = d - \frac{1}{\sqrt{3}}b \end{cases} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。これを $ac - b^2 = d$ に代入すると、 $d \neq 0$ より

$$\begin{aligned} (d - \sqrt{3}b) \left(d - \frac{1}{\sqrt{3}}b \right) - b^2 &= d \\ \Leftrightarrow d^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}bd &= d \\ \Leftrightarrow d - \frac{4\sqrt{3}}{3}b &= 1 \\ \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{4}(d-1) \end{aligned}$$

である。これを①に代入して

$$a = \frac{1}{4}d + \frac{3}{4}, c = \frac{3}{4}d + \frac{1}{4}$$

であるから

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} d+3 & \sqrt{3}(d-1) \\ \sqrt{3}(d-1) & 3d+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

直線 $x + \sqrt{3}y = 0$ 上の任意の点の座標は、実数 t を用いて $(\sqrt{3}t, -t)$ と表せて、これを f によって移すと

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \sqrt{3}t \\ -t \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} d+3 & \sqrt{3}(d-1) \\ \sqrt{3}(d-1) & 3d+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}t \\ -t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}t \\ -t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $(\sqrt{3}t, -t)$ に移る。すなわち直線 $x + \sqrt{3}y = 0$ 上の任意の点は f によって自分自身に移される。

(証明終)

(3)

xy 平面上の任意の点 P の座標を (x, y) とおく。点 P を f によって移した点の座標を (X, Y) とすると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} d+3 & \sqrt{3}(d-1) \\ \sqrt{3}(d-1) & 3d+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (x + \sqrt{3}y)d + 3x - \sqrt{3}y \\ (\sqrt{3}x + 3y)d - \sqrt{3}x + y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{3}X - \sqrt{3}x + y \\ \Leftrightarrow (Y - y) &= \sqrt{3}(X - x) \end{aligned}$$

となる。これは (X, Y) が (x, y) 、すなわち点 P を通る傾き $\sqrt{3}$ の直線上にあることを示している。

(証明終)