

第1問

(1)

$P_1(0, 1)$ であるとする。すると $P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), P_4(-1, 0), P_5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), P_6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となる。まず $\triangle P_1P_2P_3$ の面積を求める。線分 P_2P_3 は円の直径であるので $\triangle P_1P_2P_3$ は $\angle P_2P_1P_3 = 90^\circ$ の直角三角形である。ここで

$$P_1P_2 = \sqrt{\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1$$
$$P_1P_3 = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{3}$$

であるので

$$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。次に $\triangle P_1P_3P_5$ の面積を求める。 $\triangle P_1P_3P_5$ は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形であるからその面積は

$$\triangle P_1P_3P_5 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \triangle P_1P_2P_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \triangle P_1P_3P_5 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(2)

三角形が出来るのはさいころを 3 回振って出た目が全て異なる場合である。さいころを 3 回振って出た目が全て異なる場合の数は 1 から 6 の自然数の中から 3 つ数字を選びそれらを 1 列に並べる場合の数に等しいので

$${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \text{ 通り}$$

である。一方、さいころの目の出方は全部で $6^3 = 216$ 通りであるので三角形が出来る確率は

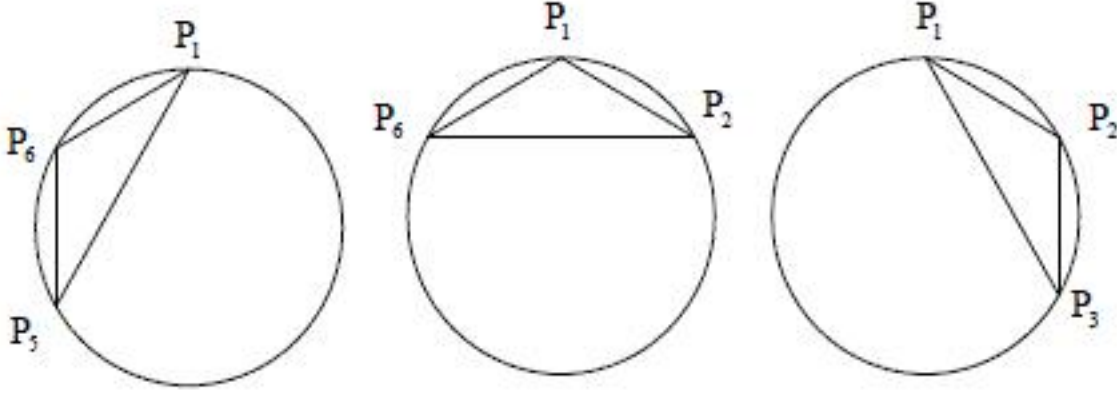
$$\frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{5}{9}$$

(3)

点 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ は対等であるから 1 回目は点 P_1 が選ばれるとしても一般性は失われない。点 P_1 を含む正三角形ではない二等辺三角形は下図の 3 つしかない。



それぞれの三角形に対応する目の出方は点 P_1 以外の 2 点の出る順番を考えるとそれぞれ 2 通りである。したがって二等辺三角形（正三角形は除く）が出来る確率は

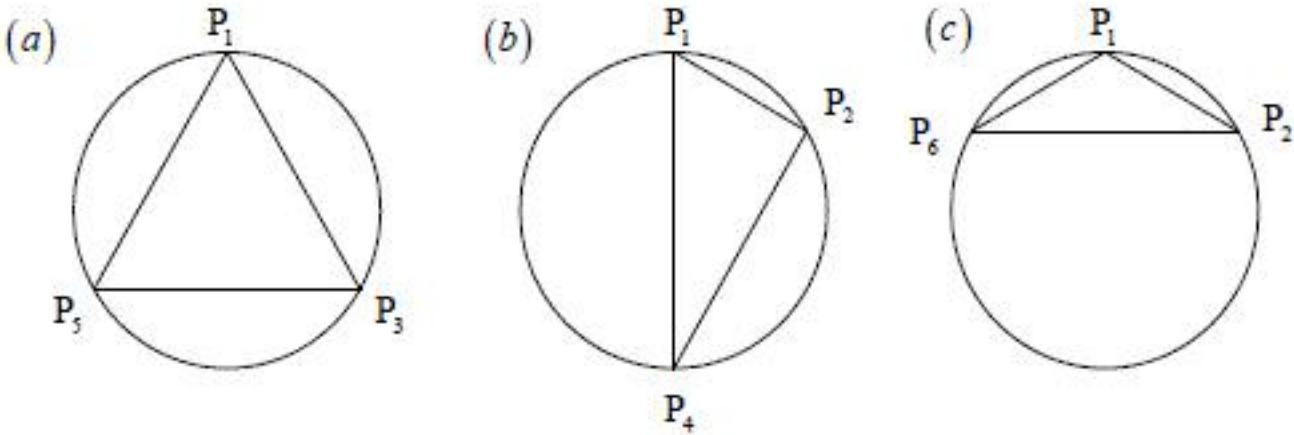
$$\frac{2+2+2}{36} = \frac{1}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{1}{6}$$

(4)

(3)と同様に 1 回目のさいころで点 P_1 が選ばれるとする。合同な三角形を同一視するとこのとき出来る三角形は下図の 3 つのパターンのみである。



(c)の三角形の面積は $P_2P_6 = \sqrt{3}$ であり高さが $\frac{1}{2}$ であることより

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。

(a)と合同な三角形ができる場合の数は、 P_3, P_5 の出る順番を考えて 2 通りであるから、その確率は $\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$ である。

(c)と合同な三角形ができる場合の数は、(3)の結果より $\frac{1}{6}$ である。

(b)と合同な三角形ができる場合の数は、以上と(2)の結果より

$$\frac{5}{9} - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

である。

よって、各パターンの面積とそのパターンの三角形が出来る確率は下表のようになる。

三角形の種類	各パターンの面積	各パターンの実現確率
(a)	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{18}$
(b)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{3}$
(c)	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{6}$

したがって求める期待値を E とすると

$$E = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{18} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{\sqrt{3}}{4}$$

第2問

(1)

このとき

$$C_1: y = (x-1)^2$$

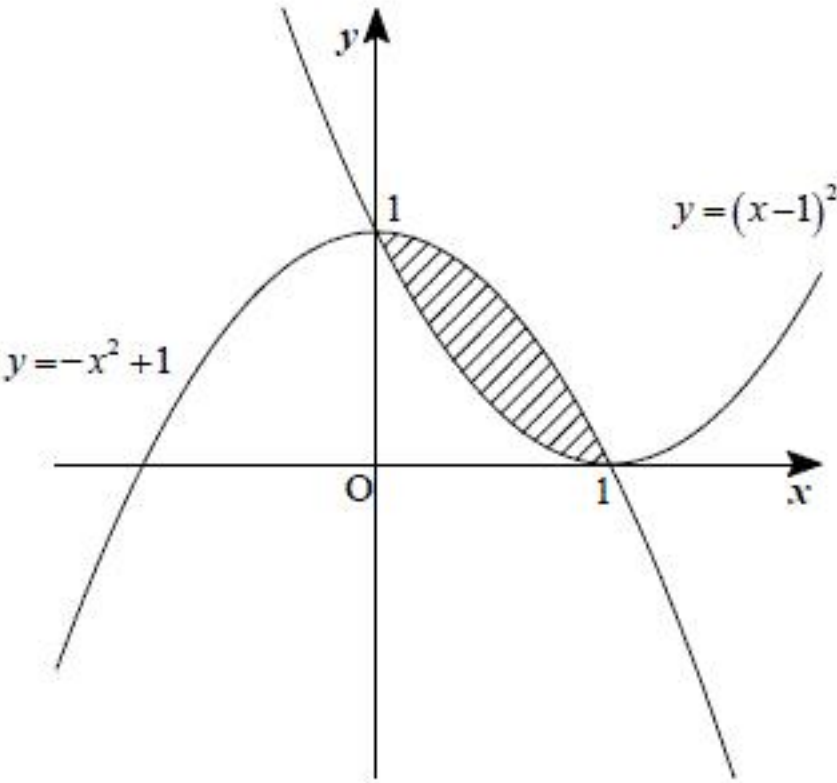
$$C_2: y = -x^2 + 1$$

である。2 曲線の方程式から y を消去すると

$$(x-1)^2 = -x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0$$

$$\therefore x = 0, 1$$

となる。よって 2 曲線 C_1, C_2 は 2 点 $(0, 1), (1, 0)$ で交わるので、求めるのは下図斜線部領域の面積である。



したがって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-x^2 + 1) - (x-1)^2\} dx \\ &= -2 \int_0^1 x(x-1) dx \\ &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

このとき

$$C_1: y = (x-1)^2$$

$$C_2: y = -x^2$$

である。 $C_1: y = (x-1)^2$ を x で微分すると

$$y' = 2(x-1)$$

となる。したがって、 C_1 の点 $(t, (t-1)^2)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2(t-1)(x-t) + (t-1)^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2(t-1)x - t^2 + 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。ここで、この直線と曲線 C_2 が接する条件を考える。この直線の方程式と曲線 C_2 の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} -x^2 &= 2(t-1)x - t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2(t-1)x - t^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}$ が C_2 に接するための条件はこの方程式が重解を持つことである。この方程式の判別式を D_1 とすると

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= (t-1)^2 - (1-t^2) \\ &= (t-1)^2 + (t+1)(t-1) \\ &= (t-1)(t-1+t+1) \\ &= 2t(t-1) \end{aligned}$$

となるから、求める条件は

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 0, 1 \end{aligned}$$

となる。

[1] $t=1$ のとき

①において $t=1$ とすると接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \text{となる。} \end{aligned}$$

[2] $t=0$ のとき

①において $t=0$ とすると接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2x + 1 \\ \text{となる。} \end{aligned}$$

以上[1][2]より求める接線の方程式は

$$y = 0, \quad y = -2x + 1$$

である。

(答) $y = 0, \quad y = -2x + 1$

(3)

C_1, C_2 の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} (x-a)^2 &= -x^2 + b \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - b &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。 C_1, C_2 がただ 1 つの共有点を持つための条件は②が重解を持つことである。したがって②の判別式を D_2 とすると

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= a^2 - 2a^2 + 2b \\ &= -a^2 + 2b \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} D_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める条件は $b = \frac{a^2}{2}$ である。

(答) $b = \frac{a^2}{2}$

(4)

重解を持つときの②の解は $x = \frac{a}{2}$ である。したがって C_1, C_2 の共有点の座標は $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ である。ここで

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

と置く。2 式から a を消去すると

$$y = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。一方 $a \geq 0$ であるから x のとりうる値の範囲は $x \geq 0$ である。したがって求める軌跡は③の $x \geq 0$ の部分である。

(答) $y = x^2$ の $x \geq 0$ の部分

第3問

$$n\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) < 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2 + \frac{1}{a_{n+1}} < (n+1)\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

とする。

(1)

①において $n=1$ とすると $a_2=2$ であるから

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} < 2$$

$$\Leftrightarrow 2 + a_1 < 4a_1 \quad (\because a_1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} < a_1$$

となる。同様に②において $n=1$ とすると

$$2 + \frac{1}{2} < \frac{2}{a_1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 4a_1 + a_1 < 4 + 2a_1 \quad (\because a_1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow a_1 < \frac{4}{3}$$

となる。したがって以上より

$$\frac{2}{3} < a_1 < \frac{4}{3}$$

となる。これを満たす正の整数は 1 のみであるから $a_1=1$ である。

(答) $a_1=1$

(2)

①において $n=2$ とすると $a_2=2$ であるから

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_3}\right) < 2$$

$$\Leftrightarrow a_3 + 2 < 2a_3 \quad (\because a_3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2 < a_3$$

となる。同様に②において $n=2$ とすると

$$2 + \frac{1}{a_3} < \frac{3}{2} + \frac{3}{a_3}$$

$$\Leftrightarrow 4a_3 + 2 < 3a_3 + 6 \quad (\because a_3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow a_3 < 4$$

となる。したがって以上より

$$2 < a_3 < 4$$

となる。これを満たす正の整数は 3 のみであるので $a_3=3$ である。

(答) $a_3=3$

(3)

(1)(2)の結果より $a_1=1, a_2=2, a_3=3$ である。したがって数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=n$ と推定できる。数学的帰納法を利用して命題

「任意の自然数 n に対して $a_n=n$ となる」 $\cdots$ (※)

を証明する。

[1] $n=1, 2$ のとき

$a_1=1, a_2=2$ であるから (※) は $n=1, 2$ のとき成立する。

[2] $n=k$ ($k=2, 3, 4, \dots$) で (※) が成立すると仮定したとき

このとき帰納法の仮定より $a_k=k$ である。したがって①において $n=k$ とすると

$$k\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{a_{k+1}}\right) < 2$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1} + k < 2a_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow k < a_{k+1}$$

となる。同様に②において $n=k$ とすると

$$2 + \frac{1}{a_{k+1}} < (k+1)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2ka_{k+1} + k < (k+1)a_{k+1} + k(k+1)$$

$$\Leftrightarrow (k-1)a_{k+1} < k^2$$

$$\therefore a_{k+1} < \frac{k^2}{k-1}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{k-1} &= \frac{(k+1)(k-1)+1}{k-1} \\ &= k+1 + \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

である。したがって以上より

$$k < a_{k+1} < k+1 + \frac{1}{k-1}$$

となる。これを満たす正の整数は $k+1$ のみである。したがって $a_{k+1}=k+1$ である。ゆえに (※) は $n=k+1$ のときも成立する。

以上 [1][2] より数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=n$ であることが示された。

(証明終)

(4)

(3)の結果より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} &= \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2} \\ &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \end{aligned}$$

となる。したがって求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{n+1} - 1$

第4問

(1)

$A\left(a, \frac{a^2}{k}\right)$ とおく。ただし $a > 0$ とする。このとき対称性から $B\left(-a, \frac{a^2}{k}\right)$ と置ける。ここで

線分 OA が x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから

$$OA = \frac{\frac{a^2}{k}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3k}$$

と表せる。また

$$AB = a - (-a) = 2a$$

である。 $\triangle OAB$ が正三角形であることより $AB = OA$ であるから

$$2a = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3k}$$
$$\therefore a = \sqrt{3}k \quad (\because a > 0)$$

となる。これより $A(\sqrt{3}k, 3k), B(-\sqrt{3}k, 3k)$ と求まる。 $\triangle OAB$ は正三角形であることより

重心と内心が一致する。重心の x, y 座標はそれぞれ

$$x = \frac{\sqrt{3}k - \sqrt{3}k + 0}{3} = 0$$

$$y = \frac{3k + 3k + 0}{3} = 2k$$

である。したがって中心 C の座標は $C(0, 2k)$ である。

(答) $C(0, 2k)$

(2)

円 S の半径を r とすると $\triangle OAB$ の面積について

$$\frac{1}{2}r(2\sqrt{3}k + 2\sqrt{3}k + 2\sqrt{3}k) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}k \cdot 3k$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}rk = 3\sqrt{3}k^2$$
$$\therefore r = k \quad (\because k > 0)$$

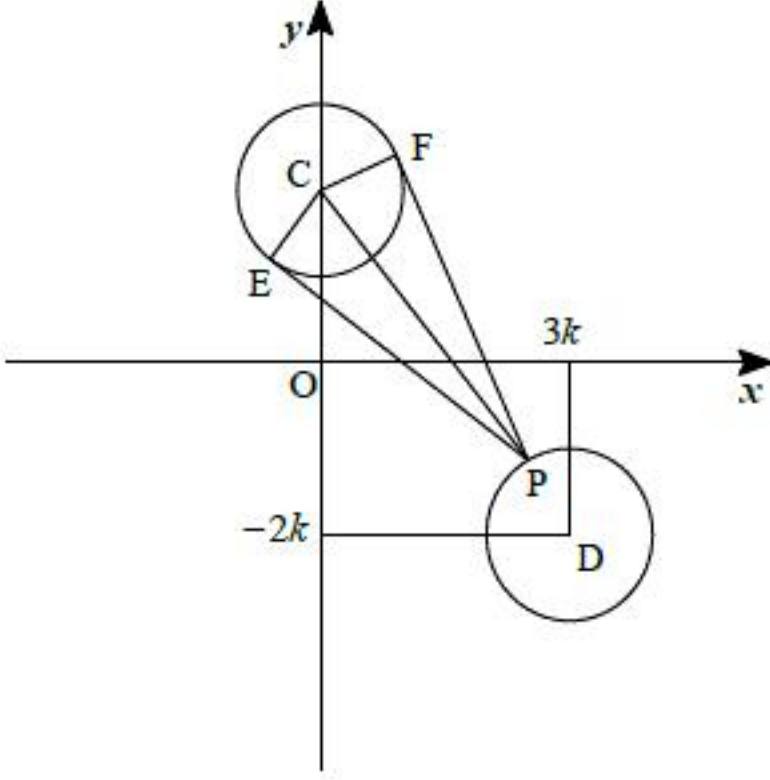
となる。したがって円 S は半径が k 中心が $C(0, 2k)$ の円であるからその方程式は

$$x^2 + (y - 2k)^2 = k^2$$

となる。

(答) $x^2 + (y - 2k)^2 = k^2$

(3)



$\angle ECF = 2\theta$ とおくと、

$$\overline{CE} \cdot \overline{CF} = |\overline{CE}| |\overline{CF}| \cos 2\theta$$
$$= |\overline{CE}| |\overline{CF}| (2\cos^2 \theta - 1)$$

と表せる。円 S の半径は k であるから $|\overline{CE}| = |\overline{CF}| = k$ である。また $\triangle CEP$ において

$$\cos \theta = \frac{CE}{CP} = \frac{k}{t}$$

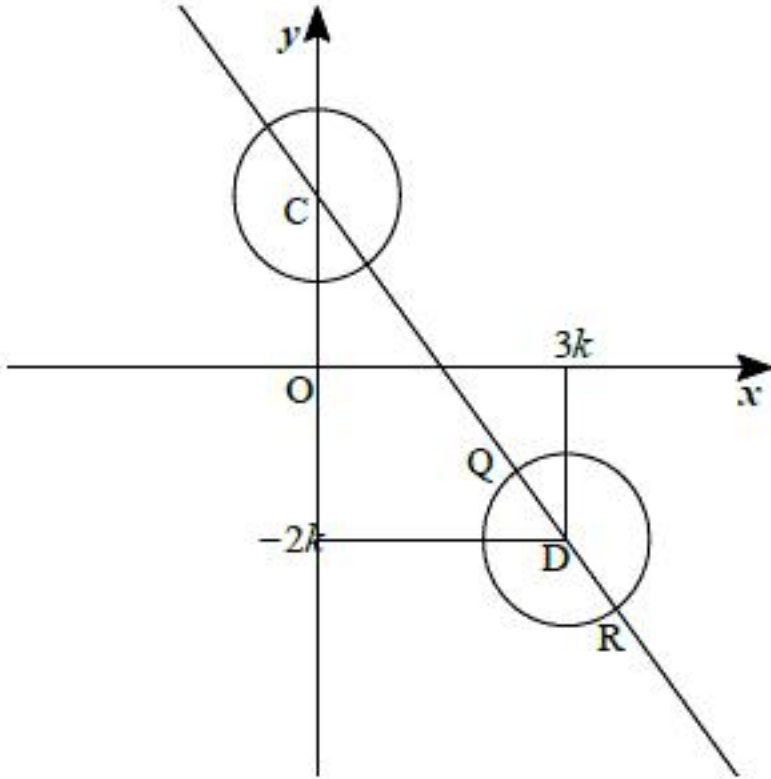
である。よって

$$\overline{CE} \cdot \overline{CF} = |\overline{CE}| |\overline{CF}| (2\cos^2 \theta - 1)$$
$$= k^2 \left(\frac{2k^2}{t^2} - 1 \right)$$
$$= \frac{2k^4}{t^2} - k^2$$

となる。

(答) $\overline{CE} \cdot \overline{CF} = \frac{2k^4}{t^2} - k^2$

(4)



(3)の結果より $\overline{CE} \cdot \overline{CF} = \frac{2k^4}{t^2} - k^2$ である。よって $\overline{CE} \cdot \overline{CF}$ が最大・最小となるのは $t = CP$ がそ

れぞれ最小・最大となるときである。直線 CD と円 T の交点のうち C に近い方の点を Q 他方の点を R とする。このとき CP が最大になるのは P が R に一致するときであり CP が最小になるのは P が Q に一致するときである。直線 CD の方程式は

$$y = \frac{-2k - 2k}{3k - 0}x + 2k$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + 2k$$

であり、円 T の方程式は

$$(x - 3k)^2 + (y + 2k)^2 = k^2$$

である。直線 CD の式と円 T の式から y を消去すると

$$(x - 3k)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 2k + 2k \right)^2 = k^2$$
$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{16}{9} \right) (x - 3k)^2 - k^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{5}{3}(x - 3k) - k \right\} \left\{ \frac{5}{3}(x - 3k) + k \right\} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{12k}{5} \right) \left(x - \frac{18k}{5} \right) = 0$$
$$\therefore x = \frac{18k}{5}, \frac{12k}{5}$$

となる。したがって $Q\left(\frac{12k}{5}, -\frac{6k}{5}\right), R\left(\frac{18k}{5}, -\frac{14k}{5}\right)$ となり、

$$CQ = \sqrt{\left(\frac{12k}{5}\right)^2 + \left(2k + \frac{6k}{5}\right)^2} = 4k$$

$$CR = \sqrt{\left(\frac{18k}{5}\right)^2 + \left(2k + \frac{14k}{5}\right)^2} = 6k$$

と表せる。よって、 $\overline{CE} \cdot \overline{CF}$ の最大値は

$$\frac{2k^4}{(4k)^2} - k^2 = -\frac{7}{8}k^2$$

であり最小値は

$$\frac{2k^4}{(6k)^2} - k^2 = -\frac{17}{18}k^2$$

となる。

(答) 最大値 $-\frac{7}{8}k^2$ 最小値 $-\frac{17}{18}k^2$