

第1問

単位円の円周を 6 等分する点を時計回りの順に $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とする. さいころを投げて出た目 i と点 P_i を対応させる. さいころを 3 回投げて出た目が全て異なる場合は対応する点を結ぶと三角形ができる. 次の問に答えよ.

- (1) $\triangle P_1P_2P_5$ と $\triangle P_1P_3P_5$ の面積をそれぞれ求めよ.
- (2) さいころを 3 回投げて, 三角形ができる確率を求めよ.
- (3) さいころを 3 回投げて, 二等辺三角形 (ただし正三角形は除く) ができる確率を求めよ.
- (4) さいころを 3 回投げてできる図形の面積の期待値を求めよ.

第2問

2 曲線 $C_1 : y = (x - a)^2$ ($a \geq 0$), $C_2 : y = -x^2 + b$ ($b \geq 0$) を考える. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $a = 1, b = 1$ のとき, C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ.
- (2) $a = 1, b = 0$ のとき, C_1 と C_2 の共通接線を求めよ.
- (3) C_1 と C_2 が共有点を 1 つだけもつための条件を a, b で表せ.
- (4) (3) の条件のもとでの C_1 と C_2 の共有点の軌跡を求めよ.

第3問

正の整数からなる数列 $\{a_n\}$ が $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$n \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) < 2, \quad 2 + \frac{1}{a_{n+1}} < (n+1) \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

を満たし、かつ $a_2 = 2$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) a_1 を求めよ。
- (2) a_3 を求めよ。
- (3) 一般項 a_n を推定し、それが正しいことを証明せよ。

(4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$ を求めよ。