

平成 24 年度入学者選抜試験問題
理学部数理科学科

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 解答用紙 4 枚と下書き用紙 4 枚は問題冊子とは別になっています。
- 3 問題は「第 1 問」、「第 2 問」、「第 3 問」、「第 4 問」の 4 問です。
- 4 問題の解答を、それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい。
- 5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れなどに気が付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 6 監督者の指示にしたがって、4 枚の解答用紙それぞれに学部名と大学受験番号を正しく記入しなさい。学部名と大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点されないことがあります。
- 7 定規は、使用してもかまいません。
- 8 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

第1問

$k > 0$ とする. 原点を O とする座標平面において, 2 点 A, B は曲線 $y = \frac{1}{k}x^2$ 上にあり, かつ $\triangle OAB$ は正三角形とする. また, $\triangle OAB$ の内接円を S とし, C をその中心とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 中心 C の座標を求めよ.
- (2) 円 S の方程式を求めよ.
- (3) T を中心 $D(3k, -2k)$, 半径 k の円とする. T 上の点 P から円 S へ 2 本の接線を引いて, その接点を E, F とする. 線分 CP の長さを t とし, 内積 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}$ を k と t を用いて表せ.
- (4) 点 P が円 T 上を動くとき, 内積 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}$ の最大値と最小値を求めよ.

第2問

$0 < a \leq 1$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 曲線 $y = -x^2 + 1$ と曲線 $y = -(x - a)^2 + 1$ の交点の座標を求めよ.
- (2) x 軸, y 軸および曲線 $y = -x^2 + 1$ ($x \geq 0$) で囲まれた図形を A とし, x 軸, 直線 $x = a$ および曲線 $y = -(x - a)^2 + 1$ ($x \leq a$) で囲まれた図形を B とする. このとき, A と B の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ.
- (3) $S(a) = S(1)$ を満たす a の値を求めよ. ただし $0 < a < 1$ とする.
- (4) $S(a)$ の最大値を求めよ.

第3問

n を自然数とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$ を求めよ.
- (2) $0 < r < 1$ とし, $S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$ とおく.
- (i) $S_n - rS_n$ を求めよ.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n$ を求めよ.
- (3) $a > 0, b > 0$ に対して, 不等式

$$a + b - \sqrt{ab} < \sqrt{a^2 + b^2} < a + b$$

が成り立つことを証明せよ.

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{3^{2(k-1)}} + \frac{k^4}{n^6}}$ を求めよ.

第4問

2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+3\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

について、次の問に答えよ.

- (1) A, B は逆行列をもつことを示し, A^{-1}, B^{-1} を求めよ.
- (2) $B^{-1}A^{-1}B, (B^{-1}A^{-1}B)^3$ を求めよ.
- (3) $A^7BX = B$ をみたす 2 次正方行列 X を求めよ.
- (4) (3) の行列 X について

$$E + X^5 + X^{10} + X^{15} + X^{20} + X^{25} = O$$

が成り立つことを示せ. ただし E は 2 次の単位行列, O は零行列とする.