

平成 24 年度入学者選抜試験問題

工 学 部

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子の本文は、1 ページから 4 ページまでです。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 監督者の指示にしたがって、解答用紙に大学受験番号を正しく記入してください。
大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 次の問いに答えよ。

(1) $x + y + z = 4$, $yz + zx + xy = 6$, $xyz = 9$ のとき, $\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}$ の値を求めよ。

(2) xy 平面上に 3 点 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある。 $\triangle ABC$ の面積が直線 $y = \sqrt{3}x + b$ で二等分されるように, 定数 b の値を求めよ。

(3) xyz 空間において, 点 $(1, 2, 1)$ を中心とする球面 S が, 平面 $z = 4$ に接している。球面 S の方程式を求めよ。

〔2〕 xy 平面上の直線 $l: y = 2x$ と曲線 $C: y = ax^2 + 1$ について、次の問いに答えよ。
ただし、 $a > 0$ である。

(1) 直線 l と曲線 C が接している。

(i) a の値を求めよ。

(ii) y 軸，直線 l および曲線 C とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) 直線 l と曲線 C が2つの交点をもつとき，交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。

(i) a の値の範囲を求めよ。

(ii) α, β をそれぞれ a の式で表せ。

(iii) $\lim_{a \rightarrow +0} \alpha, \lim_{a \rightarrow +0} \beta$ を求めよ。

〔3〕 1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC がある。辺 OA, OB, OC, AB, BC, CA の中点をそれぞれ D, E, F, G, H, I とする。 $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DI}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{DI}$ を示せ。

(4) 線分 FG の中点を J とするとき、 $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DI})$, $\overrightarrow{FJ} \perp \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FJ} \perp \overrightarrow{DI}$ を示せ。

(5) 四面体 FDEI の体積を求めよ。

- 〔4〕 実数 a, b, c, d が $ac - b^2 = d, d \neq 0$ を満たしている。 xy 平面上において、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。 f によって、点 $(1, \sqrt{3})$ が点 $(d, \sqrt{3}d)$ に移されるとき、次の問いに答えよ。

(1) $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} d+3 & \sqrt{3}(d-1) \\ \sqrt{3}(d-1) & 3d+1 \end{pmatrix}$ を示せ。

(2) f によって、直線 $x + \sqrt{3}y = 0$ 上の任意の点は、自分自身に移されることを示せ。

(3) f によって、 xy 平面上の任意の点 P は、傾きが $\sqrt{3}$ で点 P を通る直線上の点に移されることを示せ。