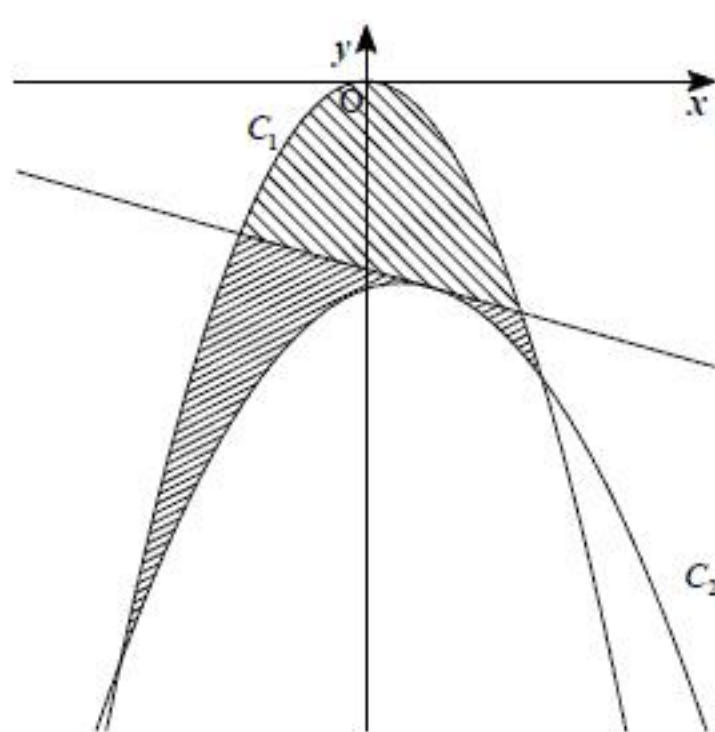


第1問



(1)

2つの放物線の式を連立すると、

$$\begin{cases} y = -2x^2 \\ y = -x^2 + 2x - 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x^2 \\ -2x^2 = -x^2 + 2x - 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x^2 \\ (x+7)(x-5) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (-7, -98), (5, -50)$$

となる。これが求める交点の座標である。

(答) $(-7, -98), (5, -50)$

(2)

放物線の式 C_2 を、

$$f(x) = -x^2 + 2x - 35$$

とおくと、

$$f'(x) = -2x + 2$$

であるから、点 $(a, -a^2 + 2a - 35)$ における放物線 C_2 の接線の方程式は、

$$y - (-a^2 + 2a - 35) = f'(a)(x - a)$$

$$y = (-2a + 2)(x - a) - a^2 + 2a - 35$$

$$\therefore y = (-2a + 2)x + a^2 - 35$$

となる。

(答) $y = (-2a + 2)x + a^2 - 35$

(3)

求める面積は、(1)の結果より、

$$\begin{aligned} \int_{-7}^5 \{-2x^2 - (-x^2 + 2x - 35)\} dx &= \int_{-7}^5 (-x^2 - 2x + 35) dx \\ &= -\int_{-7}^5 (x-5)(x+7) dx \\ &= \frac{1}{6} \{5 - (-7)\}^3 \\ &= 288 \end{aligned}$$

となる。

(答) 288

(4)

$$b \leq a \leq c$$

すなわち

$$-7 \leq a \leq 5$$

のとき、放物線 C_1 と放物線 C_2 および(2)で求めた接線で囲まれた図形の面積は、(3)で求めた面積から、放物線 C_1 と(2)で求めた接線で囲まれた図形の面積を引いたものに等しい。

よって、放物線 C_1 と(2)で求めた接線で囲まれた図形の面積を S とすると、

$$288 - S = \frac{352}{3}$$

$$\therefore S = \frac{512}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

となるような a の値を求めればよい。ここで、放物線 C_1 と(2)で求めた接線の交点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと、(2)の結果より、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{-2x^2 - ((-2a + 2)x + a^2 - 35)\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2x^2 - (-2a + 2)x - a^2 + 35\} dx \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、 α, β は、

$$-2x^2 = (-2a + 2)x + a^2 - 35$$

$$\therefore 2x^2 + (-2a + 2)x + a^2 - 35 = 0$$

の2解であり、

$$2x^2 + (-2a + 2)x + a^2 - 35 = 2(x - \alpha)(x - \beta) \quad \dots \textcircled{3}$$

と表せる。また、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a - 1 \\ \alpha\beta = \frac{a^2 - 35}{2} \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (a - 1)^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - 35}{2} \\ &= -a^2 - 2a + 71 \end{aligned}$$

より、

$$\beta - \alpha = \sqrt{-a^2 - 2a + 71} \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。一方、②、③より、

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\alpha}^{\beta} 2(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= (-2) \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} \end{aligned}$$

であるから、①より、

$$\frac{(\beta - \alpha)^3}{3} = \frac{512}{3}$$

$$\therefore \beta - \alpha = 8$$

となればよい。したがって求める a の条件は、④より、

$$\begin{aligned} \sqrt{-a^2 - 2a + 71} &= 8 \\ \Leftrightarrow -a^2 - 2a + 71 &= 64 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a - 7 &= 0 \\ \therefore a &= -1 \pm \sqrt{1 - (-7)} \\ &= -1 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。これは $-7 \leq a \leq 5$ を満たす。

(答) $-1 \pm 2\sqrt{2}$

第3問

(1)

以下、等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とする。

$$\begin{aligned} a_5 + a_8 &= (a_6 - d) + (a_7 + d) \\ &= a_6 + a_7 \end{aligned}$$

より、題意は示された。

(証明終)

(2)

与えられた関係式

$$a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$$

より、

$$\begin{aligned} (a+4d)^2 + (a+5d)^2 &= (a+6d)^2 + (a+7d)^2 \\ 2a^2 + 18ad + 41d^2 &= 2a^2 + 26ad + 85d^2 \\ 8ad + 44d^2 &= 0 \\ \therefore a + \frac{11}{2}d &= 0 \quad (\because d \neq 0) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} S_{13} &= \sum_{n=1}^{13} \{a + (n-1)d\} \\ &= 13a + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 \cdot d \\ S_{13} &= 13 \\ \therefore a + 6d &= 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるから、①、②より、

$$\begin{cases} a + \frac{11}{2}d = 0 \\ a + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -11 \\ d = 2 \end{cases}$$

となる。よって、等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$-11 + 2(n-1) = 2n - 13$$

である。

(答) $2n - 13$

(3)

(2)より、第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (2k - 13) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2n(n+1) - 13n \\ &= n^2 - 12n \end{aligned}$$

である。

(答) $n^2 - 12n$

(4)

(2)で求めた一般項より、

$$\begin{aligned} \frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} &= \frac{(2m-13)(2m-11)}{2m-9} \\ &= \frac{(2m-9)^2 - 6(2m-9) + 8}{2m-9} \\ &= 2m - 15 + \frac{8}{2m-9} \end{aligned}$$

であることがわかる。この値が数列 $\{a_n\}$ の項として現れるためには、整数になることが必要である。また、 $2m-9$ は奇数であることと、8の約数のうち奇数のものは ± 1 に限ることに注意すれば、

$$\begin{aligned} 2m-9 &= \pm 1 \\ \therefore m &= 4, 5 \end{aligned}$$

が候補であることがわかる。 $m=4$ のとき、

$$\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = -7 - 8 = -15$$

となるが、この数は数列 $\{a_n\}$ の項として現れない。一方で、 $m=5$ のときは、

$$\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = -5 + 8 = 3 = a_8$$

である。したがって、求める値は $m=5$ である。

(答) 5