

第1問

(1)

$$\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$$

より,

$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}|^2 &= |\sqrt{5}\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 5|\overrightarrow{p}|^2 - 4\sqrt{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + 4|\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2 \\ |\overrightarrow{b}|^2 &= |2\sqrt{5}\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}|^2 \\ &= 20|\overrightarrow{p}|^2 + 4\sqrt{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2 \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{cases} |\overrightarrow{a}| = \sqrt{5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2} \\ |\overrightarrow{b}| = \sqrt{20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2} \end{cases}$$

を得る。

$$(答) \begin{cases} |\overrightarrow{a}| = \sqrt{5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2} \\ |\overrightarrow{b}| = \sqrt{20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2} \end{cases}$$

(2)

(1)の結果より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}| &= |\overrightarrow{b}| \\ \sqrt{5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2} &= \sqrt{20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2} \\ 5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2 &= 20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2 \\ |\overrightarrow{q}|^2 &= 5|\overrightarrow{p}|^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{p}|}{|\overrightarrow{q}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

となる。

$$(答) \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(3)

①, ②より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 &= |3\sqrt{5}\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|^2 \\ &= 45|\overrightarrow{p}|^2 - 6\sqrt{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 10|\overrightarrow{q}|^2 \\ |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 &= |-\sqrt{5}\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 5|\overrightarrow{p}|^2 + 6\sqrt{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + 9|\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 10|\overrightarrow{q}|^2 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 &= |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 \\ \therefore \frac{|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|} &= 1 \end{aligned}$$

を得る。

(答) 1

(4)

点Qが円 $x^2 + y^2 = 15$ 上にあるので,

$$|\overrightarrow{q}|^2 = 15$$

であり, ②より,

$$|\overrightarrow{p}|^2 = 3$$

となる。よって, 点Pの座標を $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ とおくと,

$$\begin{aligned} t^2 + \left(\frac{1}{2}t^2\right)^2 &= 3 \\ \frac{1}{4}(t^2 - 2)(t^2 + 6) &= 0 \\ \therefore t^2 &= 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\overrightarrow{p} = (\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, 1)$$

となる。ここで, 点Qの座標を (u, v) とおく。

[1] $\overrightarrow{p} = (\sqrt{2}, 1)$ のとき

①より,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot u + 1 \cdot v &= 0 \\ \therefore v &= -\sqrt{2}u \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= 15 \\ u^2 + (-\sqrt{2}u)^2 &= 15 \\ u^2 &= 5 \\ \therefore u &= \pm\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。よって③, ④より,

$$\overrightarrow{q} = (\sqrt{5}, -\sqrt{10}), (-\sqrt{5}, \sqrt{10})$$

である。

[2] $\overrightarrow{p} = (-\sqrt{2}, 1)$ のとき

①より,

$$\begin{aligned} (-\sqrt{2}) \cdot u + 1 \cdot v &= 0 \\ \therefore v &= \sqrt{2}u \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= 15 \\ u^2 + (\sqrt{2}u)^2 &= 15 \\ u^2 &= 5 \\ \therefore u &= \pm\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となる。よって⑤, ⑥より,

$$\overrightarrow{q} = (\sqrt{5}, \sqrt{10}), (-\sqrt{5}, -\sqrt{10})$$

である。

以上, [1], [2]より,

$$\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}\} = \{((\sqrt{2}, 1), (\pm\sqrt{5}, \mp\sqrt{10}))\}, \{((-\sqrt{2}, 1), (\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{10}))\} \text{ (複合同順)}$$

である。

$$(答) \{ \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \} = \{ ((\sqrt{2}, 1), (\pm\sqrt{5}, \mp\sqrt{10})) \}, \{ ((-\sqrt{2}, 1), (\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{10})) \} \text{ (複合同順)}$$

第2問

(1)

以下、等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とする。

$$\begin{aligned} a_5 + a_8 &= (a_6 - d) + (a_7 + d) \\ &= a_6 + a_7 \end{aligned}$$

より、題意は示された。

(証明終)

(2)

与えられた関係式

$$a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$$

より、

$$\begin{aligned} (a+4d)^2 + (a+5d)^2 &= (a+6d)^2 + (a+7d)^2 \\ 2a^2 + 18ad + 41d^2 &= 2a^2 + 26ad + 85d^2 \\ 8ad + 44d^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a + \frac{11}{2}d = 0 \quad (\because d \neq 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} S_{13} &= \sum_{n=1}^{13} \{a + (n-1)d\} \\ &= 13a + \frac{1}{2}12 \cdot 13 \cdot d \\ S_{13} &= 13 \end{aligned}$$

$$\therefore a + 6d = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、①、②より、

$$\begin{cases} a + \frac{11}{2}d = 0 \\ a + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -11 \\ d = 2 \end{cases}$$

となる。よって、等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$-11 + 2(n-1) = 2n - 13$$

である。

(答) $2n - 13$

(3)

(2)より、第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (2k - 13) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2n(n+1) - 13n \\ &= n^2 - 12n \end{aligned}$$

である。

(答) $n^2 - 12n$

(4)

(2)で求めた一般項より、

$$\begin{aligned} \frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} &= \frac{(2m-13)(2m-11)}{2m-9} \\ &= \frac{(2m-9)^2 - 6(2m-9) + 8}{2m-9} \\ &= 2m - 15 + \frac{8}{2m-9} \end{aligned}$$

であることがわかる。この値が数列 $\{a_n\}$ の項として現れるためには、整数になることが必要である。また、 $2m-9$ は奇数であることと、8の約数のうち奇数のものは ± 1 に限ることに注意すれば、

$$\begin{aligned} 2m-9 &= \pm 1 \\ \therefore m &= 4, 5 \end{aligned}$$

が候補であることがわかる。 $m=4$ のとき、

$$\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = -7 - 8 = -15$$

となるが、この数は数列 $\{a_n\}$ の項として現れない。一方で、 $m=5$ のときは、

$$\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = -5 + 8 = 3 = a_8$$

である。したがって、求める値は $m=5$ である。

(答) 5

第3問

(1)

部分積分を用いることにより、

$$\begin{aligned}\int_1^n \log x dx &= [x \log x - x]_1^n \\ &= n \log n - n + 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $n \log n - n + 1$

(2)

対数関数

$$y = \log x$$

は $x > 0$ で単調増加な曲線であるから、任意の2以上の自然数 k に対して、

$$\log(k-1) \leq \int_{k-1}^k \log x dx \leq \log k$$

が成り立つ。よって、

$$\sum_{k=2}^n \log(k-1) \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log x dx \leq \sum_{k=2}^n \log k$$

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) \leq \int_1^n \log x dx \leq \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$$

$$\therefore \log\{(n-1)!\} \leq n \log n - n + 1 \leq \log(n!) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、また、

$$\begin{aligned}n \log n - n + 1 &= \log n^n + \log e^{-n+1} \\ &= \log n^n e^{-n+1}\end{aligned}$$

であるから、 $\log$ の単調増加性により、

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!$$

を得る。

(3)

(2)より、2以上の自然数 n に対して、

$$n \log n - n + 1 \leq \log(n!) \leq (n+1) \log(n+1) - n$$

$$\therefore \frac{n \log n - n + 1}{n \log n} \leq \frac{\log(n!)}{n \log n} \leq \frac{(n+1) \log(n+1) - n}{n \log n}$$

であり、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n - n + 1}{n \log n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\log n} + \frac{1}{n \log n} \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \log(n+1) - n}{n \log n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\log(n+1)}{\log n} - \frac{1}{\log n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{\log(n+1) - \log n + \log n}{\log n} - \frac{1}{\log n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log n} + 1 \right) - \frac{1}{\log n} \right\} \\ &= 1 \cdot (0+1) - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

となるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n \log n} = 1$$

である。

第4問

(1)

求める行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

とおくと、すべての自然数 n に対して、

$$\begin{aligned}f(\mathbf{P}_n)&=\mathbf{P}_{n+1} \\ \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n \\ 1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}n+1 \\ 1\end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix}an+b \\ cn+d\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}n+1 \\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

を満たす。①がすべての自然数 n に対して成り立つのは、

$$\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

のときである。これが求める行列 A である。

$$\text{(答)} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2)

求める行列 B を

$$B=\begin{pmatrix}e & f \\ g & h\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}e & f \\ g & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-2r \\ 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}e+f \\ g+h\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-2r \\ 1\end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} e+f=-2r \\ g+h=1 \end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}e & f \\ g & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2r \\ 1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}2r^2-r \\ 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-2re+f \\ -2rg+h\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}2r^2-r \\ 1\end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} -2re+f=2r^2-r \\ -2rg+h=1 \end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

であるから、②、③より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} e+f=-2r \\ -2re+f=2r^2-r \\ g+h=1 \\ -2rg+h=1 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} e=-r \\ f=-r \\ g=0 \\ h=1 \end{cases} \quad (\because r>0)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$B=\begin{pmatrix}-r & -r \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \begin{pmatrix}-r & -r \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3)

(1)より、

$$\begin{aligned}A^{-1}&=\frac{1}{1-0}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}C&=ABA^{-1} \\ &=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r & -r \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}-r & 1-r \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}-r & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}C^2&=\begin{pmatrix}-r & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}^2 \\ &=\begin{pmatrix>r^2 & 1-r \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ C^3&=\begin{pmatrix>r^2 & 1-r \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix>-r^3 & 1-r+r^2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから、

$$C^n=\begin{pmatrix}(-r)^n & \sum_{k=1}^n(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

と推定できる。⑤が正しいことを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

④より、このとき⑤は成立する。

[2] $n=m$ で⑤が成立するとき、

仮定より、

$$\begin{aligned}C^{m+1}&=\begin{pmatrix}(-r)^m & \sum_{k=1}^m(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}(-r)^{m+1} & (-r)^m+\sum_{k=1}^m(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}(-r)^{m+1} & \sum_{k=1}^{m+1}(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり、 $n=m+1$ でも⑤は成立する。

以上、[1]、[2]より、すべての自然数 n に対して⑤の推定は正しいことが示された。

(証明終)

$$\text{(答)} \quad \begin{pmatrix}(-r)^n & \sum_{k=1}^n(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(4)

行列 C^n で表される 1 次変換による点 $(1, r)$ の像は、(3)より、

$$\begin{pmatrix}(-r)^n & \sum_{k=1}^n(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-r)^n+r\sum_{k=1}^n(-r)^{k-1} \\ r\end{pmatrix}$$

であるから、

$$x_n=(-r)^n+r\sum_{k=1}^n(-r)^{k-1}=-\sum_{k=1}^{n-1}(-r)^k$$

となる。したがって、 $0<r<1$ のとき、 $-1<-r<0$ であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}x_n&=\lim_{n\rightarrow\infty}-\sum_{k=1}^{n-1}(-r)^k \\ &=-\frac{-r}{1+r} \\ &=\frac{r}{1+r}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{r}{1+r}$$