

第1問

(1)

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 - \frac{3}{x^4} \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{x^4} \right) \end{aligned}$$

より、 $g(x)$ の定義域が $x \neq 0$ であることに注意して、次の増減表を得る。

x		-1		0		1	
$g'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$g(x)$	↗	極大 -4	↘	/	↘	極小 4	↗

よって $g(x)$ の極値は、
 $x = -1$ のとき -4 、 $x = 1$ のとき 4

である。

(答) 増減 前表
極値 $x = -1$ のとき -4 、 $x = 1$ のとき 4

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = +\infty$$

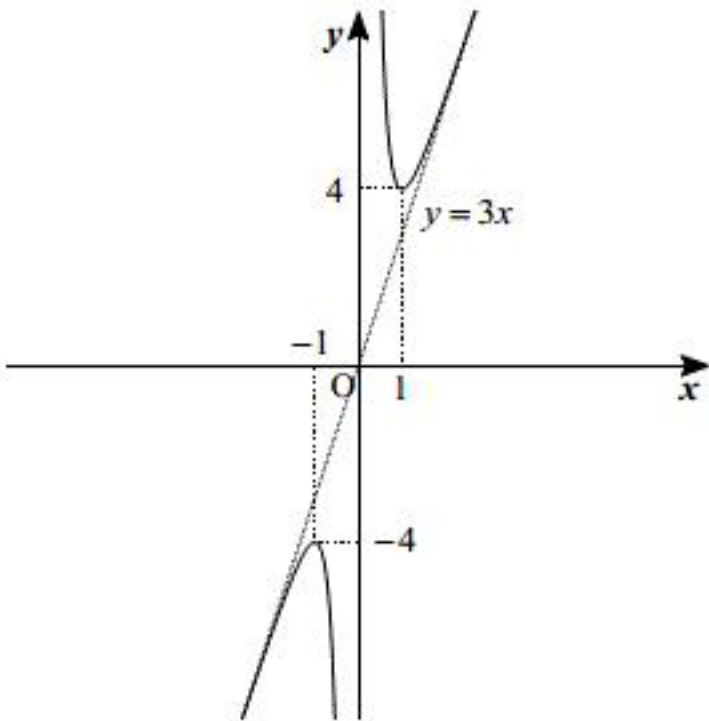
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

より、直線 $x = 0$ は $y = g(x)$ の漸近線であり、また、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \{g(x) - 3x\} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \{g(x) - 3x\} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、直線 $y = 3x$ も $y = g(x)$ の漸近線である。以上より、(1)の増減表と合わせて $y = g(x)$ の概形は次のようになる。



(答) 概形 前グラフ
漸近線の方程式 $x = 0$ 、 $y = 3x$

(3)

$f(x)$ の定義域が $x \neq 0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} f(x) &= kx \\ \frac{f(x)}{x} &= k \\ \therefore g(x) &= k \end{aligned}$$

となるから、 $f(x) = kx$ の異なる実数解の個数は $g(x) = k$ の異なる実数解の個数. すなわち、 $y = g(x)$ と $y = k$ の交点の個数に等しい。(2)より、その個数は、

$$\begin{cases} 2 \text{ 個} & (k < -4, 4 < k \text{ のとき}) \\ 1 \text{ 個} & (k = -4, 4 \text{ のとき}) \\ 0 \text{ 個} & (-4 < k < 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。これが求める個数である。

(答) $\begin{cases} 2 \text{ 個} & (k < -4, 4 < k \text{ のとき}) \\ 1 \text{ 個} & (k = -4, 4 \text{ のとき}) \\ 0 \text{ 個} & (-4 < k < 4 \text{ のとき}) \end{cases}$

第2問

(1)

$-1 \leq x \leq 0$ において、

$$f(x) = -x\sqrt{x+1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(3x+2) \end{aligned}$$

となる。よってこの区間における $f(x)$ の増減表は次表のようになる。

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	

以上より、 $-1 \leq x \leq 0$ において $f(x)$ は

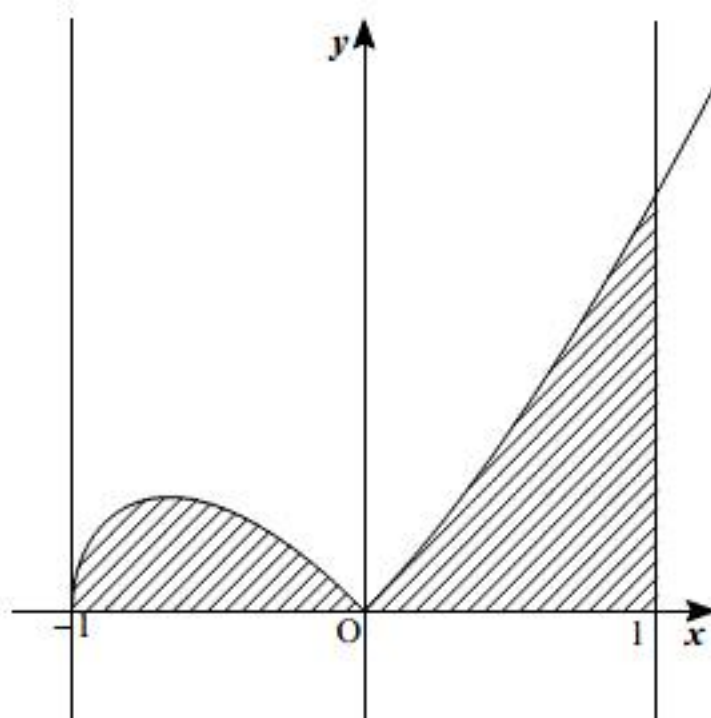
$$x = -\frac{2}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

をとる。

(答) 最大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

最大値をとる x の値 $-\frac{2}{3}$

(2)



$-1 \leq x \leq 1$ において、

$$f(x) = |x|\sqrt{x+1}$$

は常に 0 以上の値をとるから、 D の面積は、

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 |x|\sqrt{x+1} dx \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、

$$t = x+1$$

とおくと、

$$\frac{dt}{dx} = 1$$

x	-1	$\rightarrow$	1
t	0	$\rightarrow$	2

であるから、 $\textcircled{1}$ より求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x|\sqrt{x+1} dx &= \int_0^2 |t-1|\sqrt{t} dt \\ &= \int_0^1 (1-t)\sqrt{t} dt + \int_1^2 (t-1)\sqrt{t} dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= \frac{8+4\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8+4\sqrt{2}}{15}$

(3)

回転体の体積の公式より、求める体積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \pi \left(|x|\sqrt{x+1} \right)^2 dx &= \pi \int_{-1}^1 (x^3 + x^2) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3} \pi$