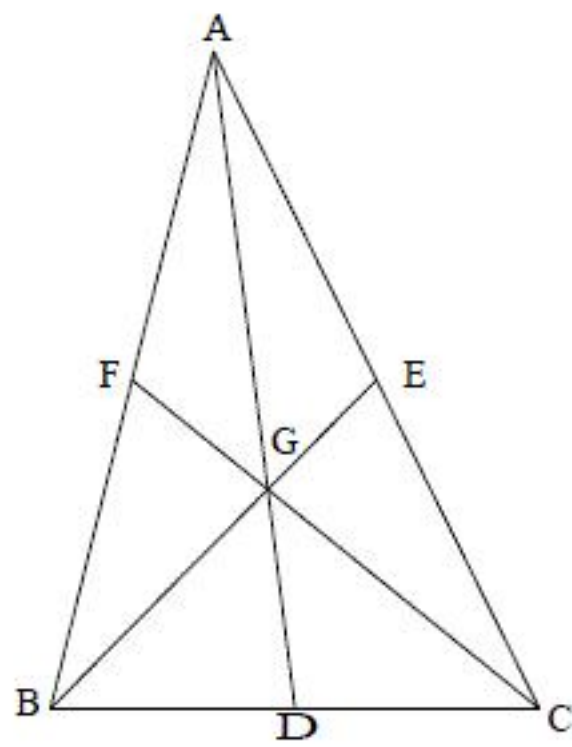


第1問



(1)

上図より、

$$\begin{aligned}\triangle ABG : \triangle BCG &= AE : EC \\ &= w : z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle BCG : \triangle CAG &= BF : FA \\ &= y : x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle CAG : \triangle ABG &= CD : DB \\ &= z : y\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{w} &= \frac{\triangle CAG}{\triangle BCG} \cdot \frac{\triangle ABG}{\triangle CAG} \cdot \frac{\triangle BCG}{\triangle ABG} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{w} &= 1 \\ \therefore w &= x\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\triangle AFE &= \triangle ABC \cdot \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} \\ &= \frac{x^2}{(x+y)(x+z)}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{x^2}{(x+y)(x+z)}$$

(3)

(2)と同様にすれば、

$$\begin{aligned}\triangle BDF &= \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} \\ \triangle CED &= \frac{z^2}{(z+y)(z+x)}\end{aligned}$$

となることがわかるから、

$$\begin{aligned}\triangle DEF &= 1 - \{\triangle AFE + \triangle BDF + \triangle CED\} \\ &= 1 - \frac{x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{\{(x+y)(z+x) - x^2\}(y+z) - \{y^2(z+x) + z^2(x+y)\}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{(xy + yz + zx)(y+z) - \{y^2(z+x) + z^2(x+y)\}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{y}{z} \\ \therefore y &= \beta z \\ \alpha &= \frac{x}{y} \\ x &= \alpha y \\ \therefore x &= \alpha \beta z\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\triangle DEF &= \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2\alpha\beta z \cdot \beta z \cdot z}{(\alpha\beta z + \beta z)(\beta z + z)(z + \alpha\beta z)} \\ &= \frac{2\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha\beta)}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \frac{2\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha\beta)}$$

(4)

(3)より、 $\triangle DEF$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha\beta)} &= \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1+\alpha) \frac{1}{\sqrt{\beta}}(1+\beta) \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}(1+\alpha\beta)} \\ &= \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{\beta}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\alpha\beta}\right)}\end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{\beta}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\alpha\beta}\right) \quad \cdots \text{①}$$

が最小になるときを考えればよい。相加相乗平均に関する不等式より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\alpha}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{\beta} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{\beta}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\alpha\beta} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \sqrt{\alpha\beta}} = 2\end{aligned}$$

という関係が成立し、これらの等号は $\alpha = \beta = 1$ のときに同時に満たされる。したがって $\alpha = \beta = 1$ のとき①は最小になるから、(1)も考慮すれば、 $\triangle DEF$ の面積が最大になるのは、点 D, E, F が各辺の midpoint になるときであることがわかる。

(証明終)

第2問

(1)

以下、等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とする。

$$\begin{aligned}a_5 + a_8 &= (a_6 - d) + (a_7 + d) \\ &= a_6 + a_7\end{aligned}$$

より、題意は示された。

(証明終)

(2)

与えられた関係式

$$a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$$

より、

$$\begin{aligned}(a+4d)^2 + (a+5d)^2 &= (a+6d)^2 + (a+7d)^2 \\ 2a^2 + 18ad + 41d^2 &= 2a^2 + 26ad + 85d^2 \\ 8ad + 44d^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore a + \frac{11}{2}d = 0 \quad (\because d \neq 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、また、

$$\begin{aligned}S_{13} &= \sum_{n=1}^{13} \{a + (n-1)d\} \\ &= 13a + \frac{1}{2}12 \cdot 13 \cdot d \\ S_{13} &= 13\end{aligned}$$

$$\therefore a + 6d = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、①、②より、

$$\begin{cases} a + \frac{11}{2}d = 0 \\ a + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -11 \\ d = 2 \end{cases}$$

となる。よって、等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$-11 + 2(n-1) = 2n - 13$$

である。

(答) $2n - 13$

(3)

(2)より、第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n (2k - 13) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2n(n+1) - 13n \\ &= n^2 - 12n\end{aligned}$$

である。

(答) $n^2 - 12n$

(4)

(2)で求めた一般項より、

$$\begin{aligned}\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} &= \frac{(2m-13)(2m-11)}{2m-9} \\ &= \frac{(2m-9)^2 - 6(2m-9) + 8}{2m-9} \\ &= 2m - 15 + \frac{8}{2m-9}\end{aligned}$$

であることがわかる。この値が数列 $\{a_n\}$ の項として現れるためには、整数になることが必要である。また、 $2m-9$ は奇数であることと、8の約数のうち奇数のものは ± 1 に限ることに注意すれば、

$$\begin{aligned}2m-9 &= \pm 1 \\ \therefore m &= 4, 5\end{aligned}$$

が候補であることがわかる。 $m=4$ のとき、

$$\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = -7 - 8 = -15$$

となるが、この数は数列 $\{a_n\}$ の項として現れない。一方で、 $m=5$ のときは、

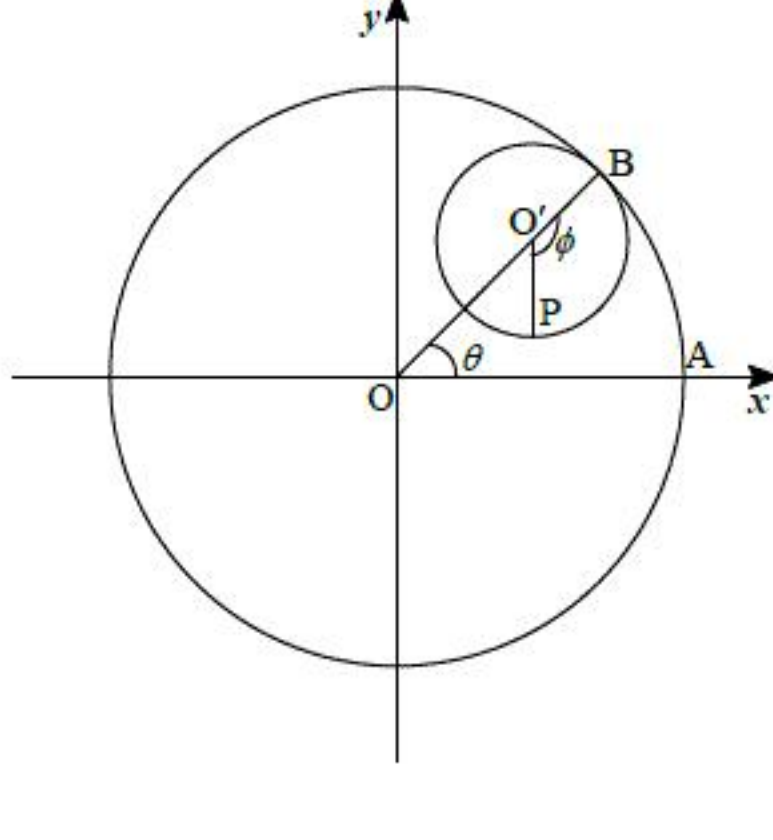
$$\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = -5 + 8 = 3 = a_8$$

である。したがって、求める値は $m=5$ である。

(答) 5

第3問

(1)



点 $(R, 0)$ をA, 円 S と円 T の接点をBとし, $O'B$ から $O'P$ まで時計回りにとった角を ϕ とする.

BからPまでの円 T の時計回りの弧の長さは,AからBまでの円 S の反時計回りの弧の長さ

に等しいから,

$$R \cdot \theta = r \cdot \phi$$

$$\therefore \phi = \frac{R}{r} \theta$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (r \cos(\theta - \phi), r \sin(\theta - \phi)) \\ &= \left(r \cos\left(\frac{R-r}{r} \theta\right), -r \sin\left(\frac{R-r}{r} \theta\right) \right) \end{aligned}$$

である. また,

$$\overrightarrow{OO'} = ((R-r) \cos \theta, (R-r) \sin \theta)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'P} \\ &= \left((R-r) \cos \theta + r \cos\left(\frac{R-r}{r} \theta\right), (R-r) \sin \theta - r \sin\left(\frac{R-r}{r} \theta\right) \right) \end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{cases} x(\theta) = (R-r) \cos \theta + r \cos\left(\frac{R-r}{r} \theta\right) \\ y(\theta) = (R-r) \sin \theta - r \sin\left(\frac{R-r}{r} \theta\right) \end{cases}$$

である.

$$(\text{答}) \begin{cases} x(\theta) = (R-r) \cos \theta + r \cos\left(\frac{R-r}{r} \theta\right) \\ y(\theta) = (R-r) \sin \theta - r \sin\left(\frac{R-r}{r} \theta\right) \end{cases}$$

(2)

$$x(\theta) = (R-r) \cos \theta + r \cos\left(\frac{R-r}{r} \theta\right)$$

より,

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= -(R-r) \sin \theta - (R-r) \sin\left(\frac{R-r}{r} \theta\right) \theta \\ &= -(R-r) \left\{ \sin \theta + \sin\left(\frac{R-r}{r} \theta\right) \right\} \\ &= -2(R-r) \sin\left(\frac{R}{2r} \theta\right) \theta \cos\left(\frac{R}{2r} \theta - 1\right) \theta \quad (\because \text{和積公式}) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる. ここで,

$$0 < \theta < \frac{2r}{R} \cdot \frac{3}{2} \pi \quad \dots \textcircled{2}$$

のとき, $2r < R \leq 3r$ であることに注意すれば,

$$0 < \left(\frac{R}{2r} - 1\right) \theta < \left(\frac{R}{2r} - 1\right) \frac{2r}{R} \cdot \frac{3}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi - \frac{2r}{R} \cdot \frac{3}{2} \pi \leq \frac{\pi}{2}$$

であるから, $\cos\left(\frac{R}{2r} - 1\right) \theta$ は常に正である. また, ②より,

$$0 < \left(\frac{R}{2r} \theta\right) < \frac{3}{2} \pi$$

であることに注意すれば, $x(\theta)$ の増減表は次表のようになる.

θ	0	...	$\frac{2r}{R} \pi$	...	$\frac{2r}{R} \cdot \frac{3}{2} \pi$
$x'(\theta)$		-	0	+	
$x(\theta)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

以上より, $x(\theta)$ は

$$\theta = \frac{2r}{R} \pi$$

のとき最小となる.

$$(\text{答}) \frac{2r}{R} \pi$$

(3)

$R=3, r=1$ のとき, (1)より,

$$\begin{cases} x(\theta) = 2 \cos \theta + \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2 \sin \theta - \sin 2\theta \end{cases} \quad \dots \textcircled{4}$$

である. 倍角の公式より,

$$y(\theta) = 2 \sin \theta (1 - \cos \theta)$$

となるから, 点P がはじめて x 軸に到達する, すなわち $y(\theta) = 0$ となるのは,

$$\theta = \pi$$

のときであり, これが求める角 θ_0 である.

$$0 \leq \theta \leq \theta_0 = \pi$$

のとき,

$$0 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

であるから,

$$y(\theta) = 2 \sin \theta (1 - \cos \theta)$$

$$\geq 0$$

である.

(証明終)

$$(\text{答}) \theta_0 = \pi$$

(4)

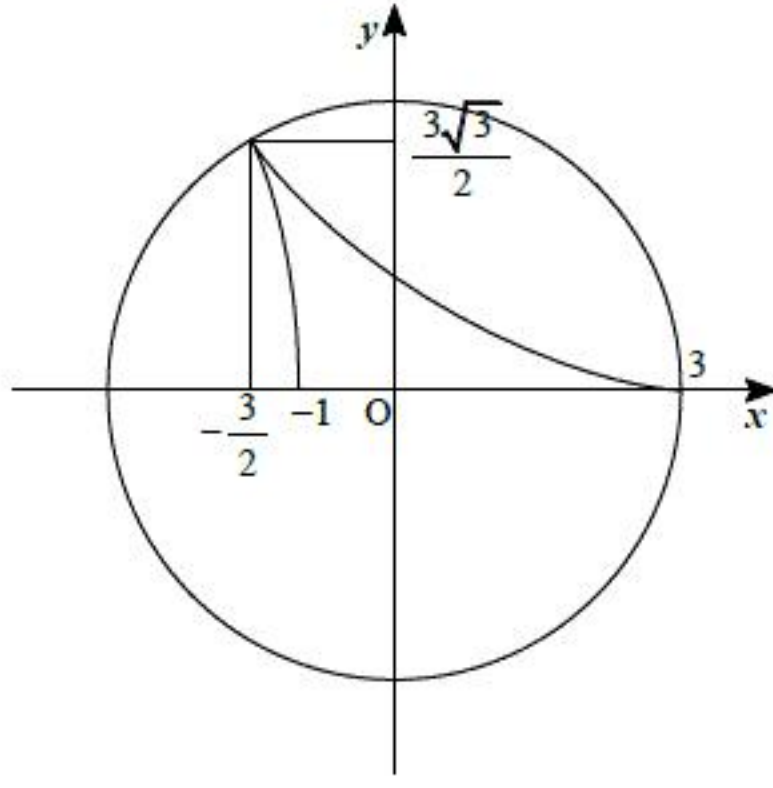
(3)の④より,

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= 2(\cos \theta - \cos 2\theta) \\ &= 2\{\cos \theta - (2 \cos^2 \theta - 1)\} \\ &= 2(1 - \cos \theta)(2 \cos \theta + 1) \end{aligned}$$

であるから, (2)と合わせて, $\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}$ の進行表は次表のようになる.

θ	0	...	$\frac{2}{3} \pi$	...	π
$x'(\theta)$		-	0	+	
$y'(\theta)$		+	0	-	
$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\nwarrow$	$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

したがって, 点P の軌跡は次図のようになる.



ここで,

$$\frac{dx}{d\theta} = -2(\sin \theta + \sin 2\theta)$$

であるから, 求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} y dx - \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} y dx &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 y \frac{dx}{d\theta} d\theta + \int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 (2 \sin \theta - \sin 2\theta) \{-2(\sin \theta + \sin 2\theta)\} d\theta \\ &= 2 \int_{\pi}^0 (\sin^2 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta - 2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= 2 \int_{\pi}^0 \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} - \sin \theta \sin 2\theta - (1 - \cos 2\theta) \right) d\theta \quad (\because \text{半角公式}) \\ &= -2 \int_{\pi}^0 \left(\frac{1 + \cos 4\theta}{2} + \sin \theta \sin 2\theta - \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{4}{3} \sin^3 \theta - \sin 2\theta \right]_0^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる.

$$(\text{答}) \pi$$

第4問

(1)

求める行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

とおくと、すべての自然数 n に対して、

$$\begin{aligned}f(P_n)&=P_{n+1} \\ \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n \\ 1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}n+1 \\ 1\end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix}an+b \\ cn+d\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}n+1 \\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

を満たす。①がすべての自然数 n に対して成り立つのは、

$$\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

のときである。これが求める行列 A である。(答) $\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2)

求める行列 B を

$$B=\begin{pmatrix}e & f \\ g & h\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}e & f \\ g & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-2r \\ 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}e+f \\ g+h\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-2r \\ 1\end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases}e+f=-2r \\ g+h=1\end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}e & f \\ g & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2r \\ 1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}2r^2-r \\ 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-2re+f \\ -2rg+h\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}2r^2-r \\ 1\end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases}-2re+f=2r^2-r \\ -2rg+h=1\end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

であるから、②、③より、

$$\begin{aligned}\begin{cases}e+f=-2r \\ -2re+f=2r^2-r \\ g+h=1 \\ -2rg+h=1\end{cases} \\ \therefore \begin{cases}e=-r \\ f=-r \\ g=0 \\ h=1\end{cases} \quad (\because r>0)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$B=\begin{pmatrix}-r & -r \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。(答) $\begin{pmatrix}-r & -r \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(3)

(1)より、

$$\begin{aligned}A^{-1}&=\frac{1}{1-0}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}C&=ABA^{-1} \\ &=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r & -r \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}-r & 1-r \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}-r & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}C^2&=\begin{pmatrix}-r & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}^2 \\ &=\begin{pmatrix>r^2 & 1-r \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ C^3&=\begin{pmatrix>r^2 & 1-r \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix>-r^3 & 1-r+r^2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから、

$$C^m=\begin{pmatrix}(-r)^n & \sum_{k=1}^n(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

と推定できる。⑤が正しいことを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

④より、このとき⑤は成立する。

[2] $n=m$ で⑤が成立するとき、

仮定より、

$$\begin{aligned}C^{m+1}&=\begin{pmatrix}(-r)^m & \sum_{k=1}^m(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}(-r)^{m+1} & (-r)^m+\sum_{k=0}^m(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}(-r)^{m+1} & \sum_{k=0}^{m+1}(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり、 $n=m+1$ でも⑤は成立する。

以上、[1]、[2]より、すべての自然数 n に対して⑤の推定は正しいことが示された。

(証明終)

$$(答) \begin{pmatrix}(-r)^n & \sum_{k=1}^n(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(4)

行列 C^n で表される 1 次変換による点 $(1, r)$ の像は、(3)より、

$$\begin{pmatrix}(-r)^n & \sum_{k=1}^n(-r)^{k-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-r)^n+r\sum_{k=1}^n(-r)^{k-1} \\ r\end{pmatrix}$$

であるから、

$$x_n=(-r)^n+r\sum_{k=1}^n(-r)^{k-1}=-\sum_{k=1}^{n-1}(-r)^k$$

となる。したがって、 $0<r<1$ のとき、 $-1<-r<0$ であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}x_n&=\lim_{n\rightarrow\infty}-\sum_{k=1}^{n-1}(-r)^k \\ &=-\frac{-r}{1+r} \\ &=\frac{r}{1+r}\end{aligned}$$

となる。(答) $\frac{r}{1+r}$