

〔1〕

(1)

$$\begin{aligned} a - \frac{a}{10} &= 1.\dot{2} - 0.1\dot{2} \\ &= 1.1 \\ &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} a &= \frac{11}{10} \cdot \frac{10}{9} \\ &= \frac{11}{9} \end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned} b - \frac{b}{100} &= 0.\dot{8}\dot{1} - 0.008\dot{1} \\ &= 0.81 \\ &= \frac{81}{100} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} b &= \frac{81}{100} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \frac{9}{11} \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} ab &= \frac{11}{9} \cdot \frac{9}{11} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) 1

(2)

真数条件より, $x_1 > 0$ である(このとき, $x_2 = 4x_1 > 0$ となって, x_2 の真数条件も満たされる)。

2点 $(x_1, \log_2 x_1)$, $(x_2, \log_2 x_2)$ を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{\log_2 x_2 - \log_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log_2 \frac{4x_1}{x_1}}{4x_1 - x_1} = \frac{2}{3x_1}$$

であり, これが, 1 になることから, $x_1 = \frac{2}{3}$ となる。したがって, 直線 $y = x + a$ の式に点

$\left(\frac{2}{3}, \log_2 \frac{2}{3}\right)$ を代入して,

$$\log_2 \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + a \quad \therefore a = \frac{1}{3} - \log_2 3$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{3} - \log_2 3$

(3)

曲線 C と直線の交点の x 座標は, 2 つの方程式から, y を消去し,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= -x + \frac{10}{3} \quad (x > 0) \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \quad (x > 0) \\ \Leftrightarrow (3x - 1)(x - 3) &= 0 \quad (x > 0) \\ \therefore x &= \frac{1}{3}, 3 \end{aligned}$$

と求まる。 $\triangle PAB$ の面積を考えるにおいては, $A\left(\frac{1}{3}, 3\right)$, $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ として一般性を失わない。

ここで, 点 P は線分 AB の垂直二等分線上にある。 AB の中点の座標は, $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ であり, AB

の傾きは -1 であるから, 線分 AB の垂直二等分線は $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ を通る傾き 1 の直線, すなわち

$$y = x$$

である。よって P の座標は, $y = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$ と $y = x$ の交点を考えて, $P(1, 1)$ となる。このとき,

$$\overrightarrow{PA} = \left(-\frac{2}{3}, 2\right), \overrightarrow{PB} = \left(2, -\frac{2}{3}\right)$$

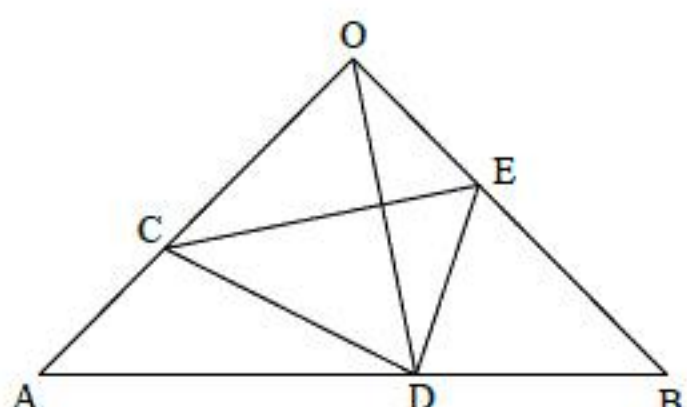
となるので, 求める面積は,

$$\frac{1}{2} \left| \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 \cdot 2 \right| = \frac{16}{9}$$

となる。

(答) $\frac{16}{9}$

〔2〕



(1)

問題文の条件より,

$$\overrightarrow{OC} = t\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OE} = (1-t)\vec{b}$$

であり,

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC}$$

$$= -t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC} = t\vec{a}, \quad \overrightarrow{OD} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OE} = (1-t)\vec{b}, \quad \overrightarrow{CE} = -t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

(2)

問題文の条件より,

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから, (1)の結果より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}|^2 &= (1-t)^2 |\vec{a}|^2 + 2(1-t)t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2 |\vec{b}|^2 \\ &= (1-t)^2 + t^2 \\ &= 2t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CE}|^2 &= (-t)^2 |\vec{a}|^2 - 2(1-t)t\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)^2 |\vec{b}|^2 \\ &= t^2 + (1-t)^2 \\ &= 2t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{OD}|^2 = 2t^2 - 2t + 1, \quad |\overrightarrow{CE}|^2 = 2t^2 - 2t + 1$$

(3)

(1)の結果と①より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CE} &= \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot \{-t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \\ &= -t(1-t)|\vec{a}|^2 + \{(1-t)^2 - t^2\}\vec{a} \cdot \vec{b} + t(1-t)|\vec{b}|^2 \\ &= -t(1-t) + t(1-t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり, $|\overrightarrow{OD}| \neq 0, |\overrightarrow{CE}| \neq 0$ から

$$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{CE}$$

である。

(証明終)

(4)

(i)

$$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{CE}$$

より, 四角形 OCDE の面積は, (2)の結果から,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{OD}| |\overrightarrow{CE}| &= \frac{1}{2} \sqrt{2t^2 - 2t + 1} \sqrt{2t^2 - 2t + 1} \\ &= \frac{1}{2} (2t^2 - 2t + 1) \end{aligned}$$

であり, また $\triangle OCE$ の面積は, (1)の結果と①より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OE}| \sin \angle COE &= \frac{1}{2} |t\vec{a}| |(1-t)\vec{b}| \sin 90^\circ \\ &= \frac{1}{2} t(1-t) \end{aligned}$$

であるから, $\triangle CDE$ の面積, すなわち $S(t)$ は,

$$\frac{1}{2} (2t^2 - 2t + 1) - \frac{1}{2} t(1-t) = \frac{3t^2 - 3t + 1}{2}$$

となる。

(ii)

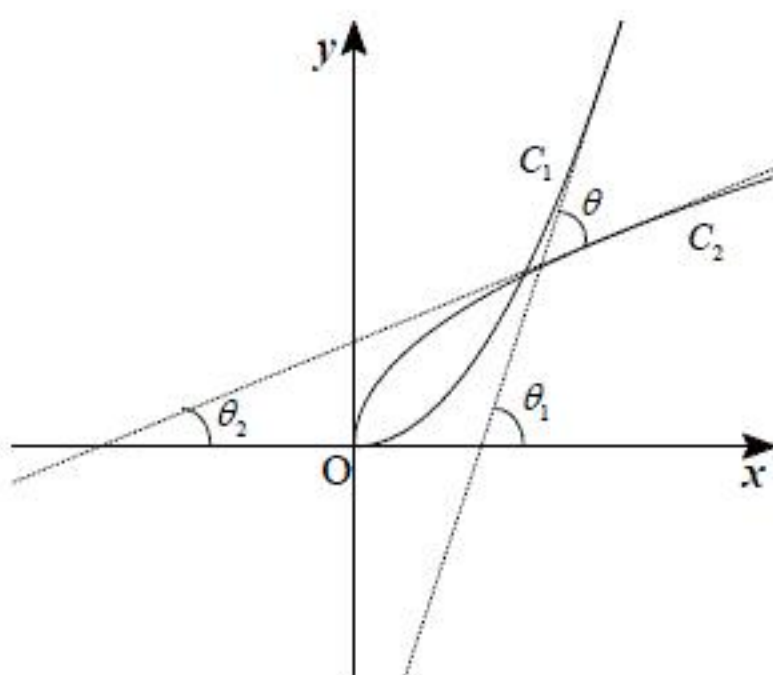
(i)より,

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{3t^2 - 3t + 1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

であるから, $S(t)$ は $0 < t < 1$ の範囲において $t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{8}$ をとる。

(答) $\frac{1}{8}$

〔3〕



(1)

C_1 と C_2 は、 $y=x$ に関して対称であるから、2 曲線の交点は C_1 と $y=x$ の交点に一致する。従って、交点の x 座標は、

$$\frac{1}{2}x^2 = x \quad \therefore x = 0, 2$$

と求まり、したがって、 C_1, C_2 の交点は、

$$(x, y) = (0, 0), (2, 2)$$

となる。求める面積は、 $y=x$ と C_1 で囲まれた図形の面積の 2 倍であり、よって、

$$2 \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (2-0)^3 = \frac{4}{3}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}$

(2)

C_2 の方程式は、 $y = f^{-1}(x)$ の値域が $y \geq 0$ であるから、

$$\frac{1}{2}y^2 = x$$

$$\therefore y = \sqrt{2x}$$

となる。

(i)

l_1 と x 軸のなす角を θ_1 $\left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ 、 l_2 と x 軸のなす角を θ_2 $\left(0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。

ここで、

$$\left(\frac{1}{2}x^2 \right)' = x$$

$$\left(\sqrt{2x} \right)' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

より、 $a \geq 2$ に注意して、

$$\tan \theta_1 = a, \quad \tan \theta_2 = \frac{1}{a}$$

であるから、加法定理より、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \frac{a - \frac{1}{a}}{1 + a \cdot \frac{1}{a}} \\ &= \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$

(ii)

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}} \\ &= \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \left(a - \frac{1}{a} \right)^2}{\frac{1}{4} \left(a + \frac{1}{a} \right)^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{a^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{1}{a^2} \right)^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sin^2 \theta = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{a^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{1}{a^2} \right)^2} = 1$$

となる。

(答) 1

〔4〕

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p-1 & -q-3 \\ p-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}q-2 \end{pmatrix}$$
$$BJ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p & p-1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}q+1 \end{pmatrix}$$

より、各成分を比較して、

$$\begin{cases} \frac{3}{2}p-1 = \frac{1}{2}p \\ -q-3 = p-1 \\ p-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}q-2 = \frac{1}{2}q+1 \end{cases}$$

を満たすような p, q をもとめればよい。3 式目, 4 式目より、

$$p=1, q=-3$$

となり、これは、1 式目と 2 式目も満たすので、これが求める値である。

(答) $p=1, q=-3$

(2)

数学的帰納法を利用して、任意の自然数 n に対して

$$J^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1}$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より、このとき①は成立する。

[2] $n=k$ で①が成立しているとき

仮定より、

$$J^{k+1} = J^k J$$
$$= \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2^{k+1}} \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2^{k+1}} \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、 $n=k+1$ のときも①は成立する。

以上、[1], [2]より、任意の自然数 n に対して

$$J^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(証明終)

(3)

(1)の結果より、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$B^{-1} = \frac{1}{-3-(-2)} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、また、

$$AB = BJ$$

より、

$$A = BJB^{-1}$$
$$\therefore A^n = BJ^n B^{-1}$$

となるから、(2)より、

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 2n-2 \\ 1 & 2n-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix}$$

である。

(証明終)

(4)

(1)の結果と(3)より、

$$A^n \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n \begin{pmatrix} -2 \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ 2n-3 \end{pmatrix}$$

となり、

$$\overrightarrow{\text{OP}}_n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\text{OQ}}_n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ 2n-3 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\cos \theta_n = \frac{\overrightarrow{\text{OP}}_n \cdot \overrightarrow{\text{OQ}}_n}{\left| \overrightarrow{\text{OP}}_n \right| \left| \overrightarrow{\text{OQ}}_n \right|}$$
$$= \frac{2n-2+2n-3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(2n-2)^2 + (2n-3)^2}}$$
$$= \frac{4n-5}{\sqrt{16n^2 - 40n + 26}}$$

を得る。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-5}{\sqrt{16n^2 - 40n + 26}}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{5}{n}}{\sqrt{16 - \frac{40}{n} + \frac{26}{n^2}}}$$
$$= 1$$

である。

(答) 1