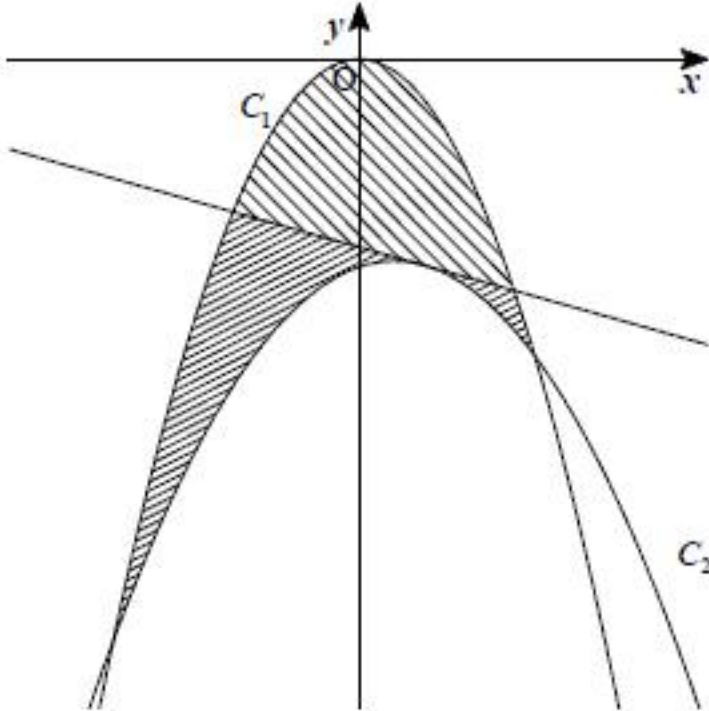


第1問



- (1) 2つの放物線の式を連立すると、
- $$\begin{cases} y = -2x^2 \\ y = -x^2 + 2x - 35 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} y = -2x^2 \\ -2x^2 = -x^2 + 2x - 35 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} y = -2x^2 \\ (x+7)(x-5) = 0 \end{cases}$$
- $$\therefore (x, y) = (-7, -98), (5, -50)$$
- となる。これが求める交点の座標である。
- (答) $(-7, -98), (5, -50)$

- (2) 放物線の式 C_2 を、
- $$f(x) = -x^2 + 2x - 35$$
- とおくと、
- $$f'(x) = -2x + 2$$
- であるから、点 $(a, -a^2 + 2a - 35)$ における放物線 C_2 の接線の方程式は、
- $$y - (-a^2 + 2a - 35) = f'(a)(x - a)$$
- $$y = (-2a + 2)(x - a) - a^2 + 2a - 35$$
- $$\therefore y = (-2a + 2)x + a^2 - 35$$
- となる。
- (答) $y = (-2a + 2)x + a^2 - 35$

- (3) 求める面積は、(1)の結果より、
- $$\begin{aligned} \int_{-7}^5 \{-2x^2 - (-x^2 + 2x - 35)\} dx &= \int_{-7}^5 (-x^2 - 2x + 35) dx \\ &= -\int_{-7}^5 (x-5)(x+7) dx \\ &= \frac{1}{6} \{5 - (-7)\}^3 \\ &= 288 \end{aligned}$$
- となる。
- (答) 288

- (4) $b \leq a \leq c$
- すなわち
- $$-7 \leq a \leq 5$$
- のとき、放物線 C_1 と放物線 C_2 および(2)で求めた接線で囲まれた図形の面積は、(3)で求めた面積から、放物線 C_1 と(2)で求めた接線で囲まれた図形の面積を引いたものに等しい。
- よって、放物線 C_1 と(2)で求めた接線で囲まれた図形の面積を S とすると、
- $$288 - S = \frac{352}{3}$$
- $$\therefore S = \frac{512}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$
- となるような a の値を求めればよい。ここで、放物線 C_1 と(2)で求めた接線の交点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと、(2)の結果より、
- $$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2x^2 - ((-2a + 2)x + a^2 - 35)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2x^2 - (-2a + 2)x - a^2 + 35\} dx \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$
- である。ここで、 α, β は、
- $$\begin{aligned} -2x^2 &= (-2a + 2)x + a^2 - 35 \\ \therefore 2x^2 + (-2a + 2)x + a^2 - 35 &= 0 \end{aligned}$$
- の2解であり、
- $$2x^2 + (-2a + 2)x + a^2 - 35 = 2(x - \alpha)(x - \beta) \quad \dots \textcircled{3}$$
- と表せる。また、解と係数の関係より、
- $$\begin{cases} \alpha + \beta = a - 1 \\ \alpha\beta = \frac{a^2 - 35}{2} \end{cases}$$
- であるから、
- $$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (a - 1)^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - 35}{2} \\ &= -a^2 - 2a + 71 \end{aligned}$$
- より、
- $$\beta - \alpha = \sqrt{-a^2 - 2a + 71} \quad \dots \textcircled{4}$$
- となる。一方、②、③より、
- $$\begin{aligned} S &= -\int_{\alpha}^{\beta} 2(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= (-2) \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} \end{aligned}$$
- であるから、①より、
- $$\begin{aligned} \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} &= \frac{512}{3} \\ \therefore \beta - \alpha &= 8 \end{aligned}$$
- となればよい。したがって求める a の条件は、④より、
- $$\begin{aligned} \sqrt{-a^2 - 2a + 71} &= 8 \\ \Leftrightarrow -a^2 - 2a + 71 &= 64 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a - 7 &= 0 \\ \therefore a &= -1 \pm \sqrt{1 - (-7)} \\ &= -1 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$
- となる。これは $-7 \leq a \leq 5$ を満たす。
- (答) $-1 \pm 2\sqrt{2}$

第2問

(1)

$$\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$$

より,

$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}|^2 &= |\sqrt{5}\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 5|\overrightarrow{p}|^2 - 4\sqrt{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + 4|\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2 \\ |\overrightarrow{b}|^2 &= |2\sqrt{5}\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}|^2 \\ &= 20|\overrightarrow{p}|^2 + 4\sqrt{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2 \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{cases} |\overrightarrow{a}| = \sqrt{5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2} \\ |\overrightarrow{b}| = \sqrt{20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2} \end{cases}$$

を得る。

$$(\text{答}) \begin{cases} |\overrightarrow{a}| = \sqrt{5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2} \\ |\overrightarrow{b}| = \sqrt{20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2} \end{cases}$$

(2)

(1)の結果より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}| &= |\overrightarrow{b}| \\ \sqrt{5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2} &= \sqrt{20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2} \\ 5|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2 &= 20|\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2 \\ |\overrightarrow{q}|^2 &= 5|\overrightarrow{p}|^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{p}|}{|\overrightarrow{q}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(3)

①, ②より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 &= |3\sqrt{5}\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|^2 \\ &= 45|\overrightarrow{p}|^2 - 6\sqrt{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 10|\overrightarrow{q}|^2 \\ |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 &= |-\sqrt{5}\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 5|\overrightarrow{p}|^2 + 6\sqrt{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + 9|\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 10|\overrightarrow{q}|^2 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 &= |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 \\ \therefore \frac{|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|} &= 1 \end{aligned}$$

を得る。

(答) 1

(4)

点Qが円 $x^2 + y^2 = 15$ 上にあるので,

$$|\overrightarrow{q}|^2 = 15$$

であり, ②より,

$$|\overrightarrow{p}|^2 = 3$$

となる。よって, 点Pの座標を $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ とおくと,

$$\begin{aligned} t^2 + \left(\frac{1}{2}t^2\right)^2 &= 3 \\ \frac{1}{4}(t^2 - 2)(t^2 + 6) &= 0 \\ \therefore t^2 &= 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\overrightarrow{p} = (\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, 1)$$

となる。ここで, 点Qの座標を (u, v) とおく。

[1] $\overrightarrow{p} = (\sqrt{2}, 1)$ のとき

①より,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot u + 1 \cdot v &= 0 \\ \therefore v &= -\sqrt{2}u \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= 15 \\ u^2 + (-\sqrt{2}u)^2 &= 15 \\ u^2 &= 5 \\ \therefore u &= \pm\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。よって③, ④より,

$$\overrightarrow{q} = (\sqrt{5}, -\sqrt{10}), (-\sqrt{5}, \sqrt{10})$$

である。

[2] $\overrightarrow{p} = (-\sqrt{2}, 1)$ のとき

①より,

$$\begin{aligned} (-\sqrt{2}) \cdot u + 1 \cdot v &= 0 \\ \therefore v &= \sqrt{2}u \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= 15 \\ u^2 + (\sqrt{2}u)^2 &= 15 \\ u^2 &= 5 \\ \therefore u &= \pm\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となる。よって⑤, ⑥より,

$$\overrightarrow{q} = (\sqrt{5}, \sqrt{10}), (-\sqrt{5}, -\sqrt{10})$$

である。

以上, [1], [2]より,

$$\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}\} = \{(\sqrt{2}, 1), (\pm\sqrt{5}, \mp\sqrt{10})\}, \{(-\sqrt{2}, 1), (\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{10})\} \quad (\text{複合同順})$$

である。

$$(\text{答}) \{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}\} = \{(\sqrt{2}, 1), (\pm\sqrt{5}, \mp\sqrt{10})\}, \{(-\sqrt{2}, 1), (\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{10})\} \quad (\text{複合同順})$$

第3問

(1)

以下、等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とする。

$$\begin{aligned} a_5 + a_8 &= (a_6 - d) + (a_7 + d) \\ &= a_6 + a_7 \end{aligned}$$

より、題意は示された。

(証明終)

(2)

与えられた関係式

$$a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$$

より、

$$\begin{aligned} (a+4d)^2 + (a+5d)^2 &= (a+6d)^2 + (a+7d)^2 \\ 2a^2 + 18ad + 41d^2 &= 2a^2 + 26ad + 85d^2 \\ 8ad + 44d^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a + \frac{11}{2}d = 0 \quad (\because d \neq 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} S_{13} &= \sum_{n=1}^{13} \{a + (n-1)d\} \\ &= 13a + \frac{1}{2}12 \cdot 13 \cdot d \\ S_{13} &= 13 \end{aligned}$$

$$\therefore a + 6d = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{cases} a + \frac{11}{2}d = 0 \\ a + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -11 \\ d = 2 \end{cases}$$

となる。よって、等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$-11 + 2(n-1) = 2n - 13$$

である。

(答) $2n - 13$

(3)

(2)より、第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (2k - 13) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2n(n+1) - 13n \\ &= n^2 - 12n \end{aligned}$$

である。

(答) $n^2 - 12n$

(4)

(2)で求めた一般項より、

$$\begin{aligned} \frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} &= \frac{(2m-13)(2m-11)}{2m-9} \\ &= \frac{(2m-9)^2 - 6(2m-9) + 8}{2m-9} \\ &= 2m-15 + \frac{8}{2m-9} \end{aligned}$$

であることがわかる。この値が数列 $\{a_n\}$ の項として現れるためには、整数になることが必要である。また、 $2m-9$ は奇数であることと、8の約数のうち奇数のものは ± 1 に限ることに注意すれば、

$$\begin{aligned} 2m-9 &= \pm 1 \\ \therefore m &= 4, 5 \end{aligned}$$

が候補であることがわかる。 $m=4$ のとき、

$$\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = -7 - 8 = -15$$

となるが、この数は数列 $\{a_n\}$ の項として現れない。一方で、 $m=5$ のときは、

$$\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = -5 + 8 = 3 = a_8$$

である。したがって、求める値は $m=5$ である。

(答) 5

第4問

(1)

座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数値である点を格子点と呼ぶ。点 P は格子点の間を移動する。まず、硬貨 A と B を4回投げた後、点 P が到達しうる範囲は、

$$-4 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、

$$\cos \angle POQ = 0.8$$

のとき、 $\textcircled{1}$ より

$$\sin \angle POQ \geq 0$$

であることに注意して、

$$\begin{aligned} \sin \angle POQ &= \sqrt{1 - (0.8)^2} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \angle POQ = \frac{3}{4}$$

であるから、点 P の座標を (a, b) とおくと、

$$a:b=4:3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となることがわかる。よって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を満たす格子点は、

$$(4, 3)$$

のみであるから、この点に到達する確率を考えればよい。点 P が $(4, 3)$ に到達するには、

硬貨 A は表が4回

硬貨 B は表が3回、裏が1回

出ればよいから、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{64}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{64}$$

(2)

硬貨 A と B を8回投げた後、点 P が到達しうる範囲は、

$$-8 \leq x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 8 \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。また、

$$\sin \angle POQ = 0.8$$

のとき、

$$\begin{aligned} \cos \angle POQ &= \pm \sqrt{1 - (0.8)^2} \\ &= \pm 0.6 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \angle POQ = \pm \frac{4}{3}$$

であるから、

$$a:b=3:4 \text{ または } -3:4 \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ を満たす格子点は、

$$(-6, 8), (-3, 4), (3, 4), (6, 8)$$

であるから、これらの点に到達する確率を考えればよい。

[1] $(-6, 8)$ に到達する確率

点 P が $(-6, 8)$ に到達するには、

硬貨 A は表が1回、裏が7回

硬貨 B は表が8回

出ればよいから、求める確率は、

$${}_8C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{8192}$$

となる。

[2] $(-3, 4)$ に到達する確率

点 P は、硬貨 A の表裏に関わらず、1回硬貨を投げるごとに x 座標が正か負の方向へ1ずつ移動する。よって点 P の x 座標は硬貨 A を奇数回投げた後は奇数に、偶数回投げた後は偶数になる。よって8回ずつ硬貨を投げた後 $(-3, 4)$ に移動することはない。

[3] $(3, 4)$ に到達する確率

[2]と同様に、8回ずつ硬貨を投げた後に点 P が $(3, 4)$ に移動することはない。

[4] $(6, 8)$ に到達する確率

[1]と同様に考えれば、求める確率は、

$${}_8C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{8192}$$

となる。

以上、[1]、[2]、[3]、[4]より、求める確率は

$$\frac{1}{8192} + \frac{1}{8192} = \frac{1}{4096}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4096}$$