

平成 25 年度入学者選抜試験問題
理学部数理科学科

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 解答用紙 4 枚と下書き用紙 4 枚は問題冊子とは別になっています。
- 3 問題は「第 1 問」、「第 2 問」、「第 3 問」、「第 4 問」の 4 問です。
- 4 問題の解答を、それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい。
- 5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れなどに気が付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 6 監督者の指示にしたがって、4 枚の解答用紙それぞれに学部名と大学受験番号を正しく記入しなさい。学部名と大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点されないことがあります。
- 7 定規は、使用してもかまいません。
- 8 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

第1問

座標平面上に原点 O とは異なる 2 点 P, Q があり, 位置ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ と $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$ は垂直であるとする. $\vec{a} = \sqrt{5}\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\sqrt{5}\vec{p} + \vec{q}$ とおく. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ であるとき, 次の問に答えよ.

- (1) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$ を用いて表せ.
- (2) $\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|}$ の値を求めよ.
- (3) $\frac{|\vec{a} + \vec{b}|}{|\vec{a} - \vec{b}|}$ の値を求めよ.
- (4) 点 P が放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあり, 点 Q が円 $x^2 + y^2 = 15$ 上にあるとき, $\vec{p}$, $\vec{q}$ の成分を求めよ.

第2問

公差が0でない等差数列 $\{a_n\}$ において、初項から第 n 項までの和を S_n とする。また、 $a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$, $S_{13} = 13$ が成り立つとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) $a_5 + a_8 = a_6 + a_7$ であることを示せ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) S_n を求めよ。
- (4) m を自然数とする。 $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ の値が数列 $\{a_n\}$ の項として現れるすべての m を求めよ。

第3問

n を 2 以上の自然数とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\int_1^n \log x \, dx$ を求めよ.

(2) 関数 $y = \log x$ の定積分を利用して, 次の不等式を証明せよ.

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!$$

(3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n \log n}$$

を求めよ.

第4問

自然数 n に対し、座標平面上の点 $(n, 1)$ を P_n とする。また、 r を正の実数とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 1 次変換 f は、すべての n に対して $f(P_n) = P_{n+1}$ を満たすとする。 f を表す行列 A を求めよ。
- (2) 1 次変換 g は、点 $(1, 1)$ を点 $(-2r, 1)$ に、点 $(-2r, 1)$ を点 $(2r^2 - r, 1)$ に移すとする。 g を表す行列 B を求めよ。
- (3) $C = ABA^{-1}$ とする。行列 C^n を推定し、それが正しいことを数学的帰納法によって示せ。
- (4) 行列 C^n で表される 1 次変換による点 $(1, r)$ の像の x 座標を x_n とする。 $r < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。