

平成 25 年度入学者選抜試験問題

工 学 部

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子の本文は、1 ページから 4 ページまでです。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁，解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 監督者の指示にしたがって、解答用紙に大学受験番号を正しく記入してください。
大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点されないことがあります。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 次の問いに答えよ。

- (1) 2つの循環小数 $a = 1.\dot{2}$, $b = 0.\dot{8}\dot{1}$ に対して, ab の値を求めよ。
- (2) a を定数とする。 xy 平面上の曲線 $y = \log_2 x$ と直線 $y = x + a$ は2つの共有点をもつ。共有点の x 座標 x_1, x_2 が $x_2 = 4x_1$ を満たすように, a の値を定めよ。
- (3) xy 平面において, 曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) と直線 $y = -x + \frac{10}{3}$ の2つの共有点を A, B とする。曲線 C 上の点 P が $PA = PB$ を満たすとき, $\triangle PAB$ の面積を求めよ。

〔2〕 $\triangle OAB$ は、 $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = OB = 1$ を満たす。3 辺 OA , AB , BO を $t : (1 - t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点を、それぞれ C , D , E とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{CE}$ を t , $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(2) $|\overrightarrow{OD}|^2$, $|\overrightarrow{CE}|^2$ を t の式で表せ。

(3) $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{CE}$ を示せ。

(4) $\triangle CDE$ の面積を $S(t)$ とする。

(i) $S(t) = \frac{3t^2 - 3t + 1}{2}$ を示せ。

(ii) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ の最小値を求めよ。

- 〔3〕 関数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$) の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。 xy 平面上に 2 曲線 $C_1: y = f(x)$ と $C_2: y = f^{-1}(x)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 2 曲線 C_1, C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) $a \geq 2$ とする。曲線 C_1 上の点 $A\left(a, \frac{a^2}{2}\right)$ における接線を l_1 、曲線 C_2 上の点 $B\left(\frac{a^2}{2}, a\right)$ における接線を l_2 とし、2 直線 l_1, l_2 のなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。

(i) $\tan \theta$ を a の式で表せ。

(ii) $\lim_{a \rightarrow \infty} \sin^2 \theta$ を求めよ。

〔4〕 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & -2 \\ 1 & q \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ が $AB = BJ$ を満た

すとき、次の問いに答えよ。ただし、 p, q は定数であり、以下で用いる n は自然数である。

(1) p, q の値を求めよ。

(2) $J^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ。

(3) $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix}$ を示せ。

(4) 行列 A^n の表す 1 次変換により、 xy 平面上の点 $(p, 1)$, $(-2, q)$ が、それぞれ点 P_n, Q_n に移される。原点を O として、 $\overrightarrow{OP_n}$ と $\overrightarrow{OQ_n}$ のなす角を θ_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n$ を求めよ。