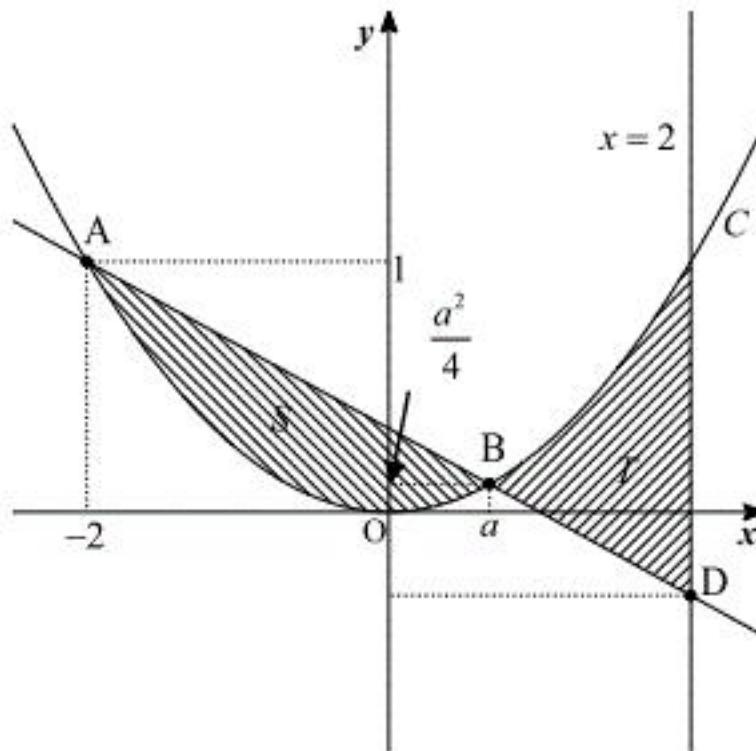


第Ⅰ問

(1)



直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{\frac{a^2}{4}-1}{a-(-2)}(x+2) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{a^2-4}{4a+8}x + \frac{2a^2+4a}{4a+8} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{a-2}{4}x + \frac{a}{2} \qquad \qquad \qquad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、直線 AB と曲線 C の交点が A, B であることに注意すると、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^a \left(\frac{a-2}{4}x + \frac{a}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-2}^a (x-a)(x+2) dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot (a+2)^3 \\ &= \frac{1}{24} (a+2)^3 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{24}(a+2)^3$

(2)

①より、求める面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \int_a^2 \left\{ \frac{x^2}{4} - \left(\frac{a-2}{4}x + \frac{a}{2} \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_a^2 \{ x^2 - (a-2)x - 2a \} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a-2}{2}x^2 - 2ax \right]_a^2 \\ &= \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a}{2} + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a}{2} + \frac{5}{3}$

(3)

条件(ii), (iii)より、

$$\begin{aligned} p_n - p_{n+1} &= 2\sqrt{\frac{p_n^2}{4} \cdot \frac{p_{n+1}^2}{4}} = \frac{p_n p_{n+1}}{2} \quad (\because p_n > 0) \\ \Leftrightarrow (p_n + 2) \left(-\frac{1}{2}p_{n+1} + 1 \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow (p_n + 2)(p_{n+1} - 2) &= -4 \\ \Leftrightarrow p_{n+1} &= 2 - \frac{4}{p_n + 2} \end{aligned}$$

である。 $p_1 = 1$ であるから、

$$p_2 = \frac{2}{3}, p_3 = \frac{2}{4}, p_4 = \frac{2}{5}$$

より、任意の自然数 n に対して、

$$p_n = \frac{2}{n+1} \qquad \qquad \qquad \dots \textcircled{2}$$

と推測できる。これを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$p_1 = \frac{2}{2} = 1$$

となり、たしかに成り立っている。

[2] $n=k$ で②が成り立つと仮定する

このとき $p_k = \frac{2}{k+1}$ であるから、

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= 2 - \frac{4}{\frac{2}{k+1} + 2} \\ &= 2 - \frac{2(k+1)}{k+2} \\ &= \frac{2}{k+2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $n=k+1$ でも②は成り立つ。

以上[1], [2]より、任意の自然数 n に対して、②は示された。よって、この結果と条件(ii)より、

$$q_n = \frac{1}{(n+1)^2} (n=1, 2, \dots)$$

を得る。

(答) $p_n = \frac{2}{n+1}, q_n = \frac{1}{(n+1)^2} (n=1, 2, \dots)$

(4)

(1), (2)の結果より、

$$\begin{aligned} T &> S \\ \Leftrightarrow \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a}{2} + \frac{5}{3} &> \frac{1}{24}(a+2)^3 \\ \Leftrightarrow \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a}{2} + \frac{5}{3} &> \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &> a \end{aligned}$$

であり、これに(3)の結果を代入すると、

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow n > 2$$

となる。よって、 $T > S$ となる最小の n は3である。

第2問

(1)

以下、試行を n 回繰り返した後の点 P の座標を p_n とする。 p_2 のとりうる値は $2, 0, -2$ であるから、各々の値となる確率を順に求めていく。

[1] $p_2 = 2$ のとき

連続して赤い玉が出ればよいから、 $p_2 = 2$ となる確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

である。

[2] $p_2 = 0$ のとき

赤い玉と白い玉が1回ずつ出ればよいから、 $p_2 = 0$ となる確率は、

$${}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$$

である。

[3] $p_2 = -2$ のとき

連続して白い玉が出ればよいから、 $p_2 = -2$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、求める期待値は、

$$2 \cdot \frac{4}{9} + 0 \cdot \frac{4}{9} + (-2) \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3}$

(2)

1回の試行での座標変化は ± 1 であるから、 n と p_n の偶奇は一致する。したがって、 $n \leq 4$ かつ $p_n = 2$ を満たすならば、 n の値は $2, 4$ のいずれかである。

[1] $p_2 = 2$ のとき

(1)[1]より、 $p_2 = 2$ となる確率は $\frac{4}{9}$ である。

[2] $p_2 \neq 2$ かつ $p_4 = 2$ のとき

2回目までに赤い玉と白い玉を1回ずつ出して、3, 4回目は連続して赤い玉が出ればよいから、 $p_2 \neq 2$ かつ $p_4 = 2$ となる確率は、

$${}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

である。

以上、[1], [2]より、求める確率は、

$$\frac{4}{9} + \frac{16}{81} = \frac{52}{81}$$

となる。

(答) $\frac{52}{81}$

(3)

1回の試行での座標変化は ± 1 であるから、一度も点 P の座標が ± 2 とならないならば、その間に座標のとりうる値は $1, 0, -1$ である。以下、偶奇性に注意して確率を求める。

[1] n が偶数のとき

偶数回目の試行の後、常に点 P の座標は 0 となるから、

$$p_k \neq \pm 2 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

を満たすためには、2回ごとに赤い玉と白い玉を1回ずつ出せばよい。したがって、求める確率は、

$$\left\{ {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \right\}^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

である。

[2] n が3以上の奇数のとき

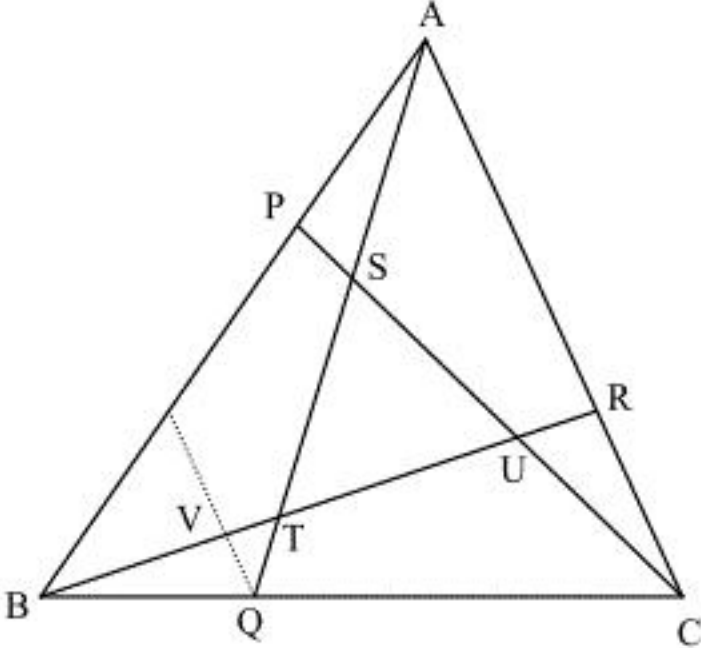
$n-1$ は偶数であるため、 $p_{n-1} = 0$ である。よって、 p_n のとりうる値は ± 1 であり、試行を n 回行っても点 P の座標が1度も ± 2 とならない確率は、試行を $n-1$ 回行っても点 P の座標が1度も ± 2 とならない確率に等しい。この確率は[1]において、 n を $n-1$ と置き換えたものであり、値は $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ となる。これは $n=1$ のときにおいても成立するため、 n が奇数の

ときに上記の確率になるとしてよい。

(答) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (n が奇数のとき), $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (n が偶数のとき)

第3問

(1)



点Qは線分BCを1:2に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1+2} \\ &= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

(2)

VQとACは平行であるから、

$$VQ:RC=BQ:BC=1:3$$

である。さらに、点Rは線分ACを1:2に内分する点であるから、

$$RC:AC=1:3$$

である。したがって、 $VQ:AC=1:9$ であり、 $\overrightarrow{VQ} = \frac{1}{9}\vec{c}$ を得る。

(答) $\overrightarrow{VQ} = \frac{1}{9}\vec{c}$

(3)

$\triangle QVT$ と $\triangle ART$ は相似であるから、(2)の結果と合わせると、

$$QT:AT=QV:AR=1:6$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= \frac{6}{7}\overrightarrow{AQ} \\ &= \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AT} = \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$

(4)

点P, Q, Rは $\triangle ABC$ の各辺を等しい比に内分する点であるから、対称性より、

$$PS:SC=QT:AT=1:6$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \frac{6}{7}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$

(5)

(3), (4)の結果より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ST} &= \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AS} \\ &= \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

を得る。また、 $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ST} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AQ}$ となることから、

$$AS:ST:TQ=3:3:1$$

が得られる。同様にして、対称性より、

$$CU:US:SP=3:3:1$$

も成立する。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SU} &= \frac{3}{7}\overrightarrow{PC} \\ &= \frac{3}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \\ &= -\frac{1}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。条件より、 $|\vec{b}|^2=1, |\vec{c}|^2=3, \vec{b} \cdot \vec{c}=0$ であるから、

$$\begin{cases} |\overrightarrow{ST}|^2 = \left| \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c} \right|^2 = \left(\frac{2}{7} \right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{7} \right)^2 \cdot 3 = \frac{1}{7} \\ |\overrightarrow{SU}|^2 = \left| -\frac{1}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c} \right|^2 = \left(-\frac{1}{7} \right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{3}{7} \right)^2 \cdot 3 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

となる。 $|\overrightarrow{ST}|>0, |\overrightarrow{SU}|>0$ より、

$$|\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\overrightarrow{SU}| = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

と求まる。さらに、

$$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SU} = \left(\frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c} \right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c} \right) = -\frac{2}{49} \cdot 1 + \frac{3}{49} \cdot 3 = \frac{1}{7}$$

と合わせて、

$$\begin{aligned}\cos \angle TSU &= \frac{\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SU}}{|\overrightarrow{ST}| |\overrightarrow{SU}|} = \frac{1}{2} \\ \therefore \angle TSU &= 60^\circ\end{aligned}$$

が得られるから、以上より、 $\triangle STU$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

となる。

(答) $|\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\overrightarrow{SU}| = \frac{2}{\sqrt{7}}, \angle TSU = 60^\circ, \triangle STU = \frac{\sqrt{3}}{14}$