

第1問

(1)

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(2)

$\overrightarrow{VQ}$ は $\overrightarrow{AC}$ に平行であるから、

$$\overrightarrow{VQ} = s\overrightarrow{CA} = s\vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{VQ} = \frac{2}{3}\vec{b} + \left(\frac{1}{3} - s\right)\vec{c}$$

とかける。また点 V は線分 BR 上にあるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AV} &= \vec{b} + t\overrightarrow{BR} \\ &= \vec{b} + t\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= (1-t)\vec{b} + \frac{2t}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

とかける。よって $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が一次独立であることより、

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = 1-t \\ \frac{1}{3} - s = \frac{2t}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ s = \frac{1}{9} \end{cases}$$

である。よって

$$\overrightarrow{AV} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

であるから、

$$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AV} = \frac{1}{9}\vec{c}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{9}\vec{c}$$

(3)

点 T は線分 BR 上にあるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= \vec{b} + i\overrightarrow{BR} \\ &= \vec{b} + i\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= (1-i)\vec{b} + \frac{2i}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

とかける。また点 T は線分 AQ 上にあるから、

$$\overrightarrow{AT} = j\overrightarrow{AQ} = \frac{2j}{3}\vec{b} + \frac{j}{3}\vec{c}$$

とかける。よって、 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が一次独立であることから、

$$\begin{cases} 1-i = \frac{2j}{3} \\ \frac{2i}{3} = \frac{j}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{7i}{3} \\ j = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{3}{7} \\ j = \frac{6}{7} \end{cases}$$

である。以上より、

$$\overrightarrow{AT} = \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$$

(4)

対称性より、(3)の結果から、

$$\overrightarrow{CS} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB}$$

がいえる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{3}{7}\vec{c} + \frac{2}{7}(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$$

(5)

(4)と同様に考え、

$$\overrightarrow{BU} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{BA}$$

がいえる。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AU} &= \overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{5}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{ST} = \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SU} = -\frac{1}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$$

である。いま $\angle BAC = 90^\circ$ より $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ であることから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{ST}|^2 &= \frac{4}{49} \cdot 1 + \frac{1}{49} \cdot 3 = \frac{1}{7} \\ |\overrightarrow{SU}|^2 &= \frac{1}{49} \cdot 1 + \frac{9}{49} \cdot 3 = \frac{4}{7}\end{aligned}$$

であり、

$$|\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\overrightarrow{SU}| = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

である。また

$$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SU} = -\frac{2}{49} \cdot 1 + \frac{3}{49} \cdot 3 = \frac{1}{7}$$

であるから、

$$\cos \angle TSU = \frac{\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SU}}{|\overrightarrow{ST}| \cdot |\overrightarrow{SU}|} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

である。したがって

$$\angle TSU = 60^\circ$$

である。よって $\triangle STU$ の面積は

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{ST}| \cdot |\overrightarrow{SU}| \sin \angle TSU = \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

である。

$$\text{(答)} \quad |\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\overrightarrow{SU}| = \frac{2}{\sqrt{7}}, \angle TSU = 60^\circ, \triangle STU = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

第2問

(1)

3つの球の選び方は20・19・18通りである。3番目の球を出したとき初めて同じ番号の白い球と赤い球がそろうための球の選び方は、1番目の球は任意、2番目の球は1番目の球と同じ番号の球を除いた18通り、3番目の球は1番目または2番目の球と同じ番号の球を選べばよいから2通りである。よって求める確率は、

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 2}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{2}{19}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{19}$$

(2)

4つの球の選び方は20・19・18・17通り。4番目の球を出したとき初めて同じ番号の白い球と赤い球がそろうための球の選び方は、1番目の球は任意、2番目の球は1番目の球と同じ番号の球を除いた18通り、3番目の球は1番目と2番目の球と同じ番号の球を除いた16通り、4番目の球は1番目または2番目または3番目の球と同じ番号の球を選べばよいから3通りである。よって求める確率は、

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{48}{323}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{48}{323}$$

(3)

1番目の球の番号を k ($k=2, 3, \dots, 10$)とする。3つの球の選び方は20・19・18通りである。ここで、1番目の球は2通りであり、これより番号が小さくなるような3番目の球の選び方は $2(k-1)$ 通りである。2番目の球はこのどちらでもない18通りから選べばよいから、1番目の球が k のとき3番目の球が $k-1$ 以下となる確率は、

$$\frac{2 \cdot 18 \cdot 2(k-1)}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{k-1}{95}$$

であるから、求める確率は、

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{k-1}{95} = \frac{1}{95} \sum_{k=1}^9 k = \frac{1}{95} \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = \frac{9}{19}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{9}{19}$$

(4)

20個の球の中から順番を区別せず4つ取り出す選び方は ${}_{20}C_4$ 通りである。ここで、この4つのうち1組だけ同じ番号の球が含まれるような選び方は、同じ番号となる数字の選び方が10通りであり、残りの2つの球の数字の選び方が ${}_9C_2$ 通り、残りの2つの球の色の選び方が 2^2 通りであるから、求める確率は

$$\frac{10 \cdot {}_9C_2 \cdot 2^2}{{}_{20}C_4} = \frac{96}{323}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{96}{323}$$

第3問

(1)

$$(t \cos t)' = -t \sin t + \cos t$$

$$(\sin t)' = \cos t$$

であるから、

$$\int t \sin t dt = -t \cos t + \sin t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。

$$(\text{答}) \int t \sin t dt = -t \cos t + \sin t + C$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{3} \pi - 2t \right| \sin t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{3} \pi - 2t \right) \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2t - \frac{2}{3} \pi \right) \sin t dt \\ &= \frac{2\pi}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t dt - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \right\} + 2 \left\{ -\int_0^{\frac{\pi}{3}} t \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt \right\} \\ &= \frac{2\pi}{3} \left\{ -[\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}} + [\cos t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right\} + 2 \left\{ [t \cos t - \sin t]_0^{\frac{\pi}{3}} + [-t \cos t + \sin t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= \frac{2\pi}{3} \left\{ \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} + 2 \left\{ 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \right\} \\ &= \frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} + 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} + 2$$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x - 2t| \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{x}{2}} (x - 2t) \sin t dt - \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x - 2t) \sin t dt \\ &= x \int_0^{\frac{x}{2}} \sin t dt - \int_0^{\frac{x}{2}} 2t \sin t dt - x \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin t dt \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\frac{x}{2}} \sin t dt + x \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + x \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \\ &= -\cos \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \\ &= -2 \cos \frac{x}{2} + 1 \end{aligned}$$

である。よって次の増減表を得る。

x	0	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	π
$\cos \frac{x}{2}$	1	...	$\frac{1}{2}$	...	0
$f'(x)$	-1	-	0	+	1
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} + 2$	$\nearrow$	

いま

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin t dt \\ &= [-2t \cos t + 2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2t) \sin t dt \\ &= \pi [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - f(0) \\ &= \pi - 2 \end{aligned}$$

であるから、最大値は $2(x=0)$ 、最小値は $\frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} + 2 \left(x = \frac{2\pi}{3} \right)$ である。

$$(\text{答}) \text{ 最大値 } 2(x=0)$$

$$\text{最小値 } \frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} + 2 \left(x = \frac{2\pi}{3} \right)$$

第4問

(1)

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} & \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} & \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} & \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\overline{OQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ であるから,}$$

$$\angle POQ = \frac{\pi}{3}$$

である。また

$$OQ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

である。

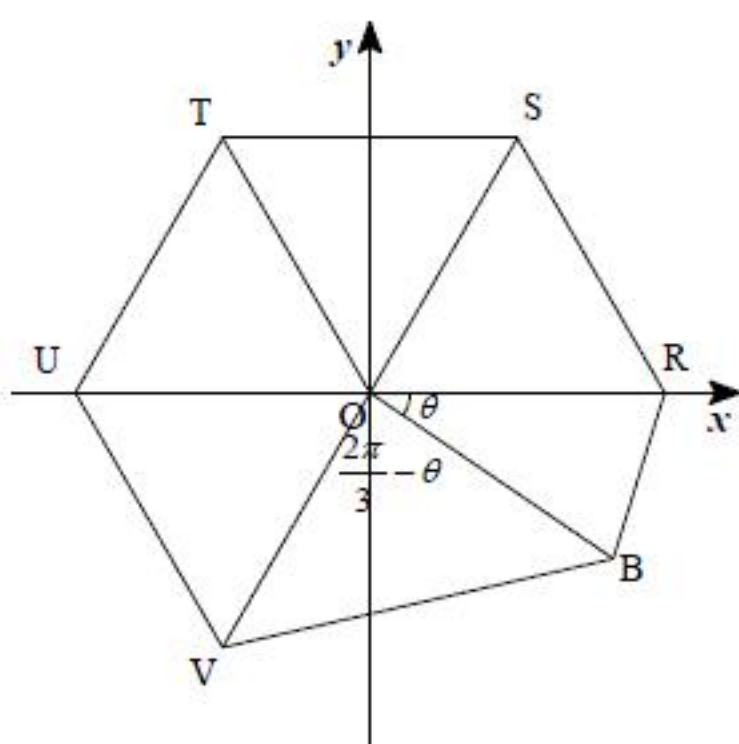
$$(答) \angle POQ = \frac{\pi}{3}, OQ = 1$$

(3)

B(2, 0) とする。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

であるから、 f は $\frac{\pi}{3}$ 回転を表す 1 次変換である。したがって題意の点群を原点中心に $-\theta$ 回転させると、次のようになる。



(i)

したがって三角形 ORS の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

である。

$$(答) \sqrt{3}$$

(ii)

上図より

$$\begin{aligned} H(\theta) &= 4 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \\ &= 4\sqrt{3} + 2 \left\{ \sin \theta + \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \right\} \\ &= 4\sqrt{3} + 4 \sin \frac{\pi}{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

である。よって $H(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $6\sqrt{3}$ をとる。

$$(答) \text{ 最大値 } 6\sqrt{3} \left(\theta = \frac{\pi}{3} \right)$$