

第 1 問

(1)

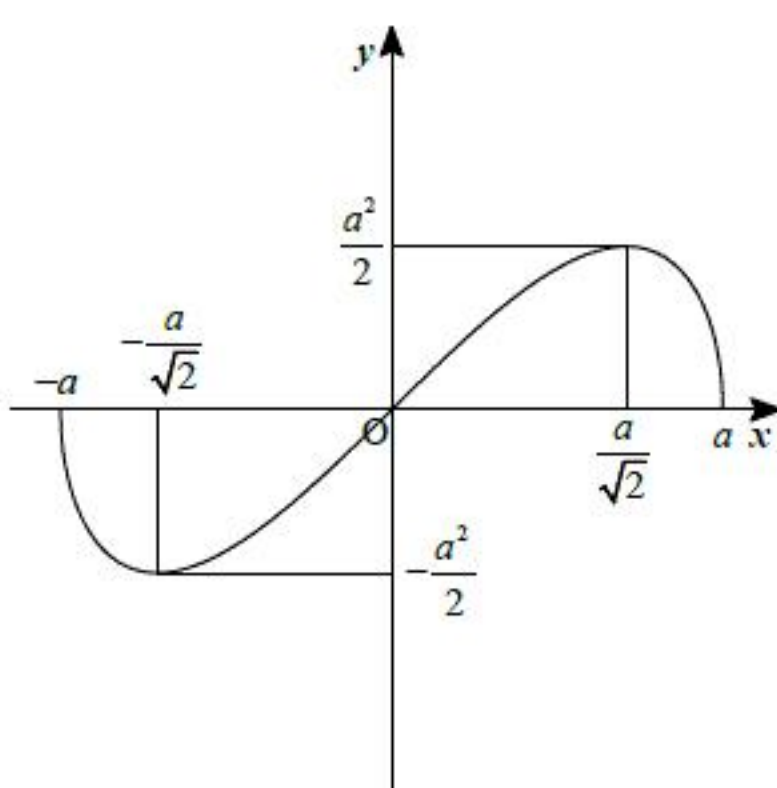
$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \text{ より}$$

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

であるから、次の増減表を得る。

x	$(-a)$	$\cdots$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(a)
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	(0)	$\searrow$	$-\frac{a^2}{2}$	$\nearrow$	$\frac{a^2}{2}$	$\searrow$	(0)

これより曲線 C の概形を得る。



(答) 増減 前表
概形 前図

(2)

$x\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ の解が 3 つであればよいから、 $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ の 0 以外の解が 2 つあればよい。

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - x^2 = \frac{1}{3} \quad (-a < x < a)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = a^2 - \frac{1}{3} \quad (-a < x < a)$$

であるから、 a の値の範囲は

$$0 < a^2 - \frac{1}{3} < a^2$$

$$\therefore a > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。またこのとき共有点の x 座標は

$$x = 0, \pm\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$$

である。

$$(答) \ a > \frac{1}{\sqrt{3}}, \ x = 0, \pm\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$$

(3)

$x = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$ における C の接線の傾きが $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となればよい。よって

$$\frac{a^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{a^2 - \left(a^2 - \frac{1}{3}\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a^2 + \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

である。このとき点 P の座標は $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ であるから、正三角形の一辺の長さは

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。よって求める面積は、

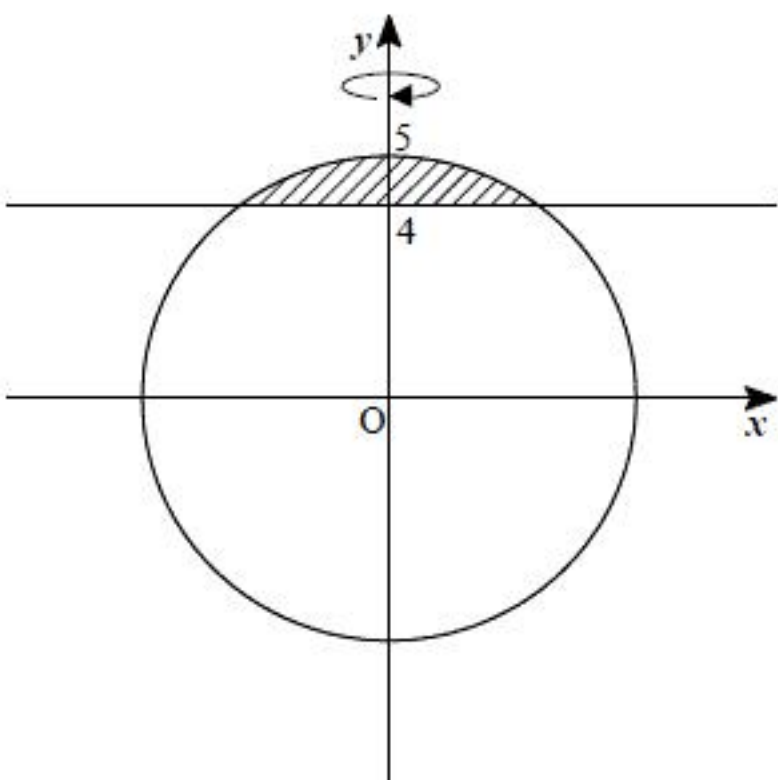
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

である。

$$(答) \ a = 1, \text{ 面積 } \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

第2問

(1)



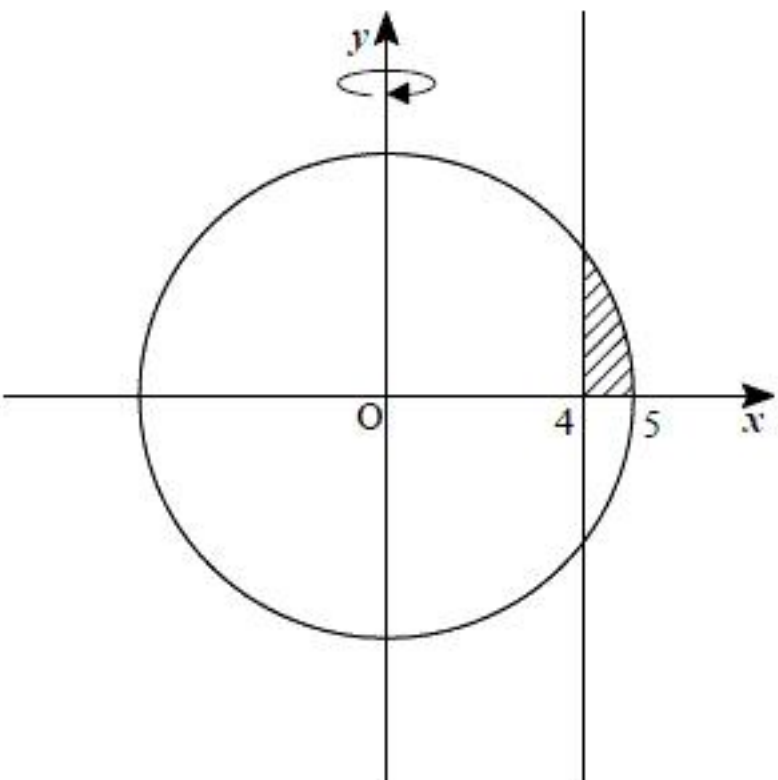
上図より求める面積は、

$$\pi \int_4^5 \left(\sqrt{25-y^2}\right)^2 dy = \pi \left[25y - \frac{1}{3}y^3\right]_4^5 = \frac{14}{3}\pi$$

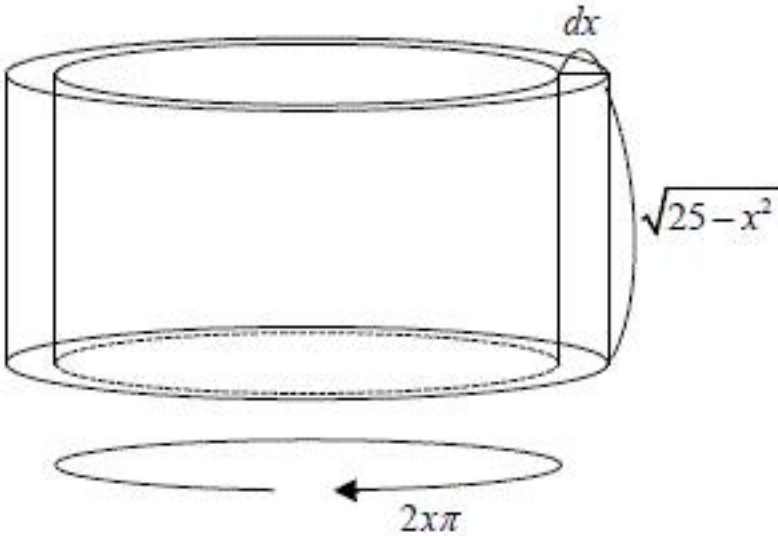
である。

(答) $\frac{14}{3}\pi$

(2)



この微小領域を次のように近似する。



よって微小体積は

$$2x\pi\sqrt{25-x^2}dx$$

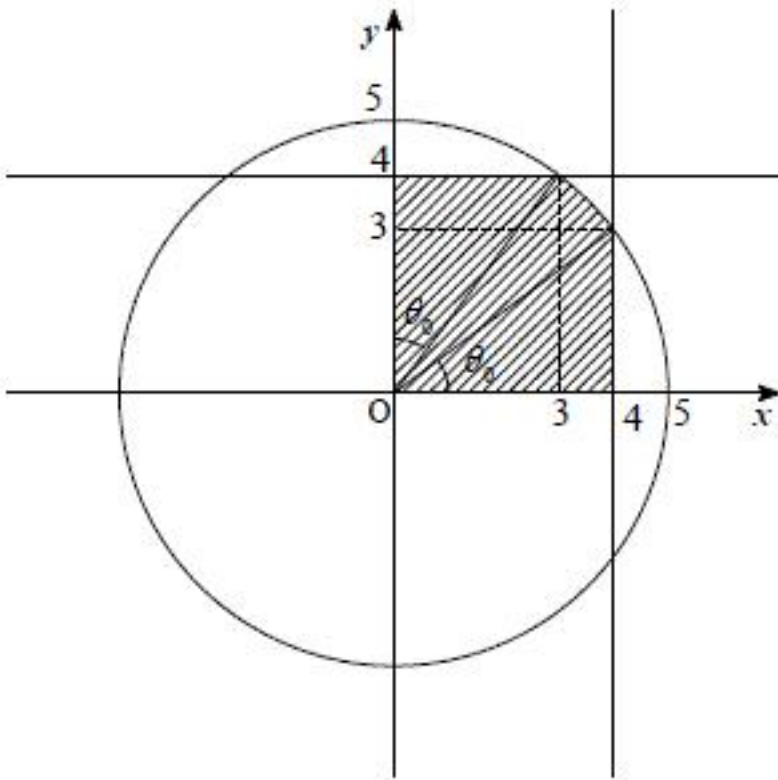
となるので、もとめる体積は、

$$\pi \int_4^5 2x\sqrt{25-x^2} dx = -\pi \left[\frac{2}{3}(25-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_4^5 = 18\pi$$

である。

(答) 18π

(3)



求める面積は上図斜線部の面積である。よって面積は

$$3\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_0\right) = \frac{25}{4}\pi + 12 - 25\theta_0$$

である。

(答) $\frac{25}{4}\pi + 12 - 25\theta_0$