

第1問

(1)

このときの点Pの位置としてありえるのは2, 0, -2のみである。点Pがそれぞれの位置にある確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2, {}_2C_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

であるから、求める期待値は、

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3}$

(2)

一回の試行で点Pの座標の絶対値は1だけ変化するのので、試行の回数と座標の偶奇は一致する。よって試行の回数が2回るときと4回るときを考えればよい。2回の試行で座標が2となる確率は、(1)より $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ である。4回の試行で座標が2となる確率は、

$${}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$$

である。ここで、2回の試行後に座標が2であり、かつ4回の試行後に座標が2である確率が

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{81}$$

であることに注意すると、求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{32}{81} - \frac{16}{81} = \frac{52}{81}$$

である。

(答) $\frac{52}{81}$

(3)

点Pの座標が一度も-2, 2にならないということは座標が-1, 0, 1のみであったということである。このようになるのは、偶数回の試行後には座標が常に0であるようなとき、すなわち座標0の位置にいた後赤が出ればその次に白が、白が出ればその次に赤が出て0に再び戻るようなときであるから、求める確率は以下になる。

[1] n が奇数のとき

$n-1$ 回目までに先述したような状況が続けばよいので、

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

[2] n が偶数のとき

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となる。

(答) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (n が奇数のとき)

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (n が偶数のとき)

(4)

試行の回数と座標の偶奇は一致するので、 n 回の試行で座標が2となるのは、 n が偶数のときのみである。 n 回目で初めて座標が2になるので、 $n-2$ 回目では座標は0である。よって $n-2$ 回目までは(3)のような状況であり、 $n-1$ 回目と n 回目で赤の球がでればよいから、(3)の結果を踏まえるともとめる確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

である。

(答) 0 (n が奇数のとき)

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (n が偶数のとき)

第2問

(1)

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(2)

$\overrightarrow{VQ}$ は $\overrightarrow{AC}$ に平行であるから、

$$\overrightarrow{VQ} = s\overrightarrow{CA} = s\vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{VQ} = \frac{2}{3}\vec{b} + \left(\frac{1}{3} - s\right)\vec{c}$$

とかける。また点 V は線分 BR 上にあるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AV} &= \vec{b} + t\overrightarrow{BR} \\ &= \vec{b} + t\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= (1-t)\vec{b} + \frac{2t}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

とかける。よって $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が一次独立であることより、

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = 1-t \\ \frac{1}{3} - s = \frac{2t}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ s = \frac{1}{9} \end{cases}$$

である。よって

$$\overrightarrow{AV} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

であるから、

$$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AV} = \frac{1}{9}\vec{c}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{9}\vec{c}$$

(3)

点 T は線分 BR 上にあるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= \vec{b} + i\overrightarrow{BR} \\ &= \vec{b} + i\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= (1-i)\vec{b} + \frac{2i}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

とかける。また点 T は線分 AQ 上にあるから、

$$\overrightarrow{AT} = j\overrightarrow{AQ} = \frac{2j}{3}\vec{b} + \frac{j}{3}\vec{c}$$

とかける。よって、 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が一次独立であることから、

$$\begin{cases} 1-i = \frac{2j}{3} \\ \frac{2i}{3} = \frac{j}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{7i}{3} \\ j = 2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{3}{7} \\ j = \frac{6}{7} \end{cases}$$

である。以上より、

$$\overrightarrow{AT} = \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$$

(4)

対称性より、(3)の結果から、

$$\overrightarrow{CS} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB}$$

がいえる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{3}{7}\vec{c} + \frac{2}{7}(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$$

(5)

(4)と同様に考え、

$$\overrightarrow{BU} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{BA}$$

がいえる。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AU} &= \overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{5}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{ST} = \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SU} = -\frac{1}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$$

である。いま $\angle BAC = 90^\circ$ より $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ であることから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{ST}|^2 &= \frac{4}{49} \cdot 1 + \frac{1}{49} \cdot 3 = \frac{1}{7} \\ |\overrightarrow{SU}|^2 &= \frac{1}{49} \cdot 1 + \frac{9}{49} \cdot 3 = \frac{4}{7}\end{aligned}$$

であり、

$$|\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\overrightarrow{SU}| = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

である。また

$$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SU} = -\frac{2}{49} \cdot 1 + \frac{3}{49} \cdot 3 = \frac{1}{7}$$

であるから、

$$\cos \angle TSU = \frac{\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SU}}{|\overrightarrow{ST}| \cdot |\overrightarrow{SU}|} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

である。したがって

$$\angle TSU = 60^\circ$$

である。よって $\triangle STU$ の面積は

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{ST}| \cdot |\overrightarrow{SU}| \sin \angle TSU = \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

である。

$$\text{(答)} \quad |\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\overrightarrow{SU}| = \frac{2}{\sqrt{7}}, \angle TSU = 60^\circ, \triangle STU = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

第3問

(1)

$$\left(-\frac{1}{a}t\cos at\right)'=t\sin at-\frac{1}{a}\cos at$$

$$\left(\frac{1}{a^2}\sin at\right)'=\frac{1}{a}\cos at$$

であるから、

$$\int t\sin atdt=-\frac{1}{a}t\cos at+\frac{1}{a^2}\sin at+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

である。また

$$\begin{aligned}\int\sin^2\frac{t}{2}dt&=\frac{1}{2}\int(1-\cos t)dt\\&=\frac{1}{2}(t-\sin t)+C\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答})\quad\int t\sin atdt=-\frac{1}{a}t\cos at+\frac{1}{a^2}\sin at+C$$

$$\int\sin^2\frac{t}{2}dt=\frac{1}{2}(t-\sin t)+C$$

(2)

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-2t|\sin tdt\\&=\int_0^{\frac{x}{2}}(x-2t)\sin tdt-\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x-2t)\sin tdt\\&=x\int_0^{\frac{x}{2}}\sin tdt-\int_0^{\frac{x}{2}}2t\sin tdt-x\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt+\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2t\sin tdt\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_0^{\frac{x}{2}}\sin tdt+x\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt+x\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\\&=-\cos\frac{x}{2}+1+\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\\&=-2\cos\frac{x}{2}+1\end{aligned}$$

である。よって次の増減表を得る。

x	0	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	π
$\cos\frac{x}{2}$	1	...	$\frac{1}{2}$	...	0
$f'(x)$	-1	-	0	+	1
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$	$\nearrow$	

いま

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{3}\pi\right)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{2}{3}\pi-2t\right|\sin tdt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{3}\pi-2t\right)\sin tdt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2t-\frac{2}{3}\pi\right)\sin tdt\\&=\frac{2\pi}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin tdt-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt\right\}+2\left\{-\int_0^{\frac{\pi}{3}}t\sin tdt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt\right\}\\&=\frac{2\pi}{3}\left\{-\left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\cos t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}+2\left\{\left[t\cos t-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-t\cos t+\sin t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}\\&=\frac{2\pi}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+2\left\{2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1\right\}\\&=\frac{2\pi}{3}-2\sqrt{3}+2\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の最小値は $\frac{2\pi}{3}-2\sqrt{3}+2$ である。

$$(\text{答})\quad x=\frac{2\pi}{3}\text{のとき最小値}\frac{2\pi}{3}-2\sqrt{3}+2$$

(3)

$$\begin{aligned}f(0)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\sin tdt\\&=\left[-2t\cos t+2\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\pi)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2t)\sin tdt\\&=\pi\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-f(0)\\&=\pi-2\end{aligned}$$

であるから、 $g(x)=f(x)-f(0)$ とおくと求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left\{g(x)\right\}^2dx$$

である。いま

$$g'(x)=f'(x)=-2\cos\frac{x}{2}+1$$

であるから、 $g(0)=0$ より、

$$g(x)=x-4\sin\frac{x}{2}$$

である。したがって、(1)の結果を用いると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\pi}\left\{x-4\sin\frac{x}{2}\right\}^2dx\\&=\pi\int_0^{\pi}\left(x^2-8x\sin\frac{x}{2}+16\sin^2\frac{x}{2}\right)dx\\&=\pi\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}-8\left[-2x\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}+16\cdot\frac{1}{2}\left[x-\sin x\right]_0^{\pi}\right\}\\&=\pi\left\{\frac{\pi^3}{3}-8\cdot 4+8\cdot\pi\right\}\\&=\frac{\pi^4}{3}+8\pi^2-32\pi\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答})\quad\frac{\pi^4}{3}+8\pi^2-32\pi$$

第4問

(1)

$$P^{-1} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \text{であるから,}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

であるから

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

より,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n & 4 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n \\ -5 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n & 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} -4 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n & 4 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n \\ -5 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n & 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

(3)

(i)

$$a_{n+1} = \frac{2p_n + q_n}{2r_n + s_n} \cdots \textcircled{1} \text{を帰納法により示す。}$$

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{7 \cdot 2 - 4}{5 \cdot 2 - 2} = \frac{5}{4} \\ \frac{2p_1 + q_1}{2r_1 + s_1} &= \frac{2 \cdot 7 - 4}{2 \cdot 5 - 2} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

であり明らかに成り立つ。

[2] $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定する。

このとき

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \frac{7a_{k+1} - 4}{5a_{k+1} - 2} \\ &= \frac{7 \cdot \frac{2p_k + q_k}{2r_k + s_k} - 4}{5 \cdot \frac{2p_k + q_k}{2r_k + s_k} - 2} \\ &= \frac{14p_k + 7q_k - 8r_k - 4s_k}{10p_k + 5q_k - 4r_k - 2s_k} \\ &= \frac{2(7p_k - 4r_k) + (7q_k - 4s_k)}{2(5p_k - 2r_k) + (5q_k - 2s_k)} \end{aligned}$$

となる。したがって、いま $A^{k+1} = AA^k$ であるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{k+1} & q_{k+1} \\ r_{k+1} & s_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k & q_k \\ r_k & s_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7p_k - 4r_k & 7q_k - 4s_k \\ 5p_k - 2r_k & 5q_k - 2s_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるので、

$$a_{k+2} = \frac{2p_{k+1} + q_{k+1}}{2r_{k+1} + s_{k+1}}$$

がいえる。したがって $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ が成り立つといえる。

以上[1],[2]より、題意は示された。

(証明終)

(ii)

(i)と(2)の結果より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2p_{n-1} + q_{n-1}}{2r_{n-1} + s_{n-1}} \\ &= \frac{-4 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-1}}{-5 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-1}} \\ &= \frac{-2^{n+1} + 2 \cdot 3^n}{-5 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3^n} \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \frac{-2^{n+1} + 2 \cdot 3^n}{-5 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3^n}$$