

〔1〕

(1)

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha-1} + \frac{\alpha}{\beta-1} &= \frac{-(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1} \\ &= \frac{-3 + 3^2 - 8}{4 + 1 - 3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。

(答) -1

(2)

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 &< 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< \sqrt{x} - \sqrt{2} < 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 &< \sqrt{x} < \sqrt{2} + 1 \\ \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} &< x < 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。 $3 - 2\sqrt{2} = 0.172\dots$, $3 + 2\sqrt{2} = 5.828\dots$ であるから, 求める自然数 x の値は
1, 2, 3, 4, 5

である。

(答) 1, 2, 3, 4, 5

(3)

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{p}$ とおくと,

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -4\vec{p} + 3(\vec{b} - \vec{p}) + 5(\vec{c} - \vec{p}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c} \end{aligned}$$

である。よって直線 AP と直線 BC の交点を D とすると

$$\overrightarrow{AD} = t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

とかけるから,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{5}{8}\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{p}$$

である。これより

$$AP:PD = 2:1, \quad BD:DC = 5:3$$

がいえるから, $\triangle PAB$ の面積は,

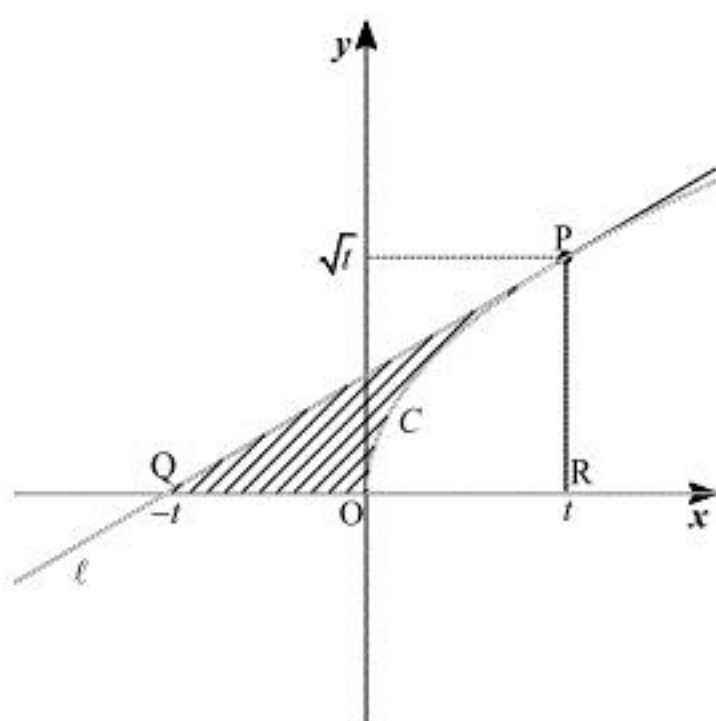
$$\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \triangle ABC = \frac{5}{12}$$

である。

(答) $\frac{5}{12}$

〔2〕

(1)



$y = \sqrt{x}$ より $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから、接線 l の式は、

$$y = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t) + \sqrt{t}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}$$

である。

(答) $y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}$

(2)

点 Q の x 座標を x_0 とおくと、

$$-\frac{\sqrt{t}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}x_0$$

$$\therefore x_0 = -t$$

であるから点 Q の座標は

$$(-t, 0)$$

である。

(答) $(-t, 0)$

(3)

底面積 $(\sqrt{t})^2 \pi$ 、高さ $2t$ の三角錐となるから、求める体積は

$$\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{t})^2 \pi \cdot 2t = \frac{2}{3} \pi t^2$$

である。

(答) $\frac{2}{3} \pi t^2$

(4)

$y = \sqrt{x}$ と x 軸と直線 $x = t$ で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は

$$\pi \int_0^t (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^t = \frac{\pi}{2} t^2$$

であるから、求める立体の体積は

$$\frac{2\pi}{3} t^2 - \frac{\pi}{2} t^2 = \frac{\pi}{6} t^2$$

である。

(答) $\frac{\pi}{6} t^2$

[3]

(1)

$$P^{-1} = \frac{1}{4+b} \begin{pmatrix} 4 & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(答) \quad P^{-1} = \frac{1}{4+b} \begin{pmatrix} 4 & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -b-24 \\ -5 & 8b+52 \end{pmatrix}$$

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & ab \\ -5 & 4a \end{pmatrix}$$

であるから, $AP = PB$ より

$$\begin{pmatrix} 5 & -b-24 \\ -5 & 8b+52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & ab \\ -5 & 4a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab+b+24=0 \\ 4a=8b+52 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2+14b+24=0 \\ a=2b+13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2+7b+12=0 \\ a=2b+13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b+3)(b+4)=0 \\ a=2b+13 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b=-3 (\because b \neq -4) \\ a=7 \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad a=7, b=-3$$

(3)

$P^{-1}AP = B$ より $P^{-1}A^nP = B^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}$ である。したがって,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n & -3 \cdot 7^n \\ -5^n & 4 \cdot 7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 5^n - 3 \cdot 7^n & 3 \cdot 5^n - 3 \cdot 7^n \\ -4 \cdot 5^n + 4 \cdot 7^n & -3 \cdot 5^n + 4 \cdot 7^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \begin{pmatrix} 4 \cdot 5^n - 3 \cdot 7^n & 3 \cdot 5^n - 3 \cdot 7^n \\ -4 \cdot 5^n + 4 \cdot 7^n & -3 \cdot 5^n + 4 \cdot 7^n \end{pmatrix}$$

〔4〕

(1)

$$A_1B_1 = \sqrt{2} \cos \theta, B_1B_2 = \sqrt{2} \cos^2 \theta, A_1B_2 = \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \text{ であるから,}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cos^2 \theta \cdot \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta = \sin \theta \cos^3 \theta$$

である。△A₁B₁B₂と△A₂B₂B₃は相似でありまた

$$A_2B_2 = \sin^2 \theta \cdot A_1B_1$$

であるから,

$$\triangle A_1B_1B_2 = \sin^4 \theta \cdot \triangle A_2B_2B_3$$

である。これより、△A_nB_nB_{n+1}の面積S_nと△A_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}の面積S_{n+1}についても

$$S_{n+1} = \sin^4 \theta \cdot S_n \quad (n \geq 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

がいえるから

$$S_2 = \sin^4 \theta \cdot S_1 = \sin^5 \theta \cos^3 \theta$$

である。

(証明終)

①より、数列{S_n}は初項S₁=sinθcos³θ、公比r=sin⁴θの等比数列であるから、一般項は

$$S_n = S_1 \cdot r^{n-1} = \sin^{4n-3} \theta \cos^3 \theta$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad S_n = \sin^{4n-3} \theta \cos^3 \theta$$

(2)

(1)の結果より、数列{S_n}の第N項までの和 $\sum_{n=1}^N S_n$ は

$$\sum_{n=1}^N S_n = \frac{S_1 - S_1 \cdot r^N}{1 - r} = S_1 \cdot \frac{1 - (\sin^4 \theta)^N}{1 - \sin^4 \theta}$$

となるから、Tの値は

$$\begin{aligned} T &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ S_1 \cdot \frac{1 - (\sin^4 \theta)^N}{1 - \sin^4 \theta} \right\} \\ &= \frac{S_1}{1 - \sin^4 \theta} \quad (\because 0 < \sin \theta < 1) \\ &= \frac{\sin \theta \cos^3 \theta}{1 - \sin^4 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta}{(1 - \sin^2 \theta)(1 + \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

であることがわかる。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta}{\frac{1}{2} (3 - \cos 2\theta)} \\ &= \frac{\sin 2\theta}{3 - \cos 2\theta} \end{aligned}$$

である。ここで

$$f(x) = \frac{\sin x}{3 - \cos x} \quad (0 < x < \pi)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x (3 - \cos x) - \sin x (\sin x)}{(3 - \cos x)^2} \\ &= \frac{3 \cos x - 1}{(3 - \cos x)^2} \end{aligned}$$

であるから、 $\cos x = \frac{1}{3}$ を満たすxをαとおくと、次表を得る。

x	(0)	⋯	α	⋯	(π)
cos x	(1)	⋯	$\frac{1}{3}$	⋯	(-1)
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗	f(α)	↘	

以上よりTの最大値は

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}$$