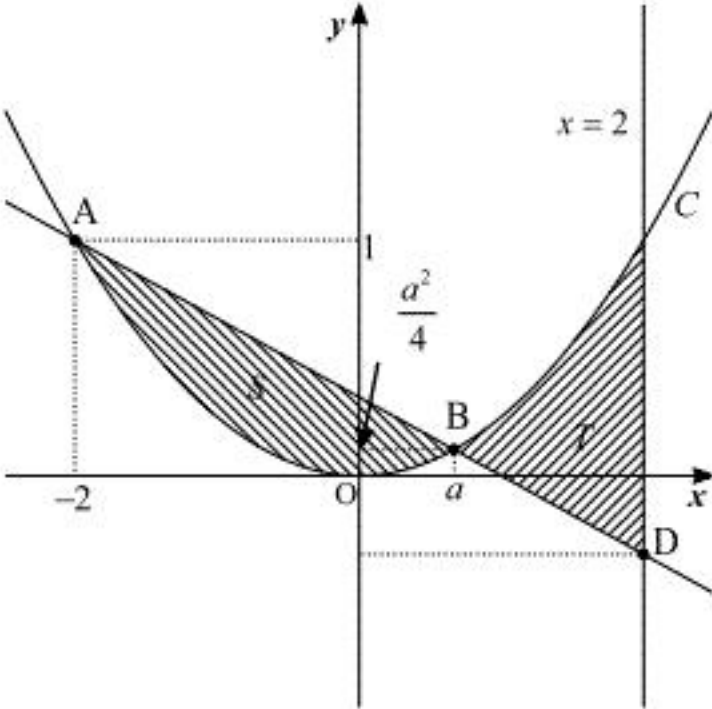


第1問

(1)



直線 AB の方程式は

$$y-1=\frac{\frac{a^2}{4}-1}{a-(-2)}(x+2)\Leftrightarrow y=\frac{a^2-4}{4a+8}x+\frac{2a^2+4a}{4a+8}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{a-2}{4}x+\frac{a}{2}\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

であり、直線 AB と曲線 C の交点が A, B であることに注意すると、求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^a\left(\frac{a-2}{4}x+\frac{a}{2}-\frac{x^2}{4}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{4}\int_{-2}^a(x-a)(x+2)dx$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot(a+2)^3$$
$$=\frac{1}{24}(a+2)^3$$

である。

(答) $\frac{1}{24}(a+2)^3$

(2)

①より、求める面積 T は

$$T=\int_a^2\left\{\frac{x^2}{4}-\left(\frac{a-2}{4}x+\frac{a}{2}\right)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_a^2\{x^2-(a-2)x-2a\}dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a-2}{2}x^2-2ax\right]_a^2$$
$$=\frac{a^3}{24}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a}{2}+\frac{5}{3}$$

となる。

(答) $\frac{a^3}{24}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a}{2}+\frac{5}{3}$

(3)

条件(ii), (iii)より

$$p_n-p_{n+1}=2\sqrt{\frac{p_n^2}{4}\cdot\frac{p_{n+1}^2}{4}}=\frac{p_np_{n+1}}{2}\quad(\because p_n>0)$$
$$\Leftrightarrow(p_n+2)\left(-\frac{1}{2}p_{n+1}+1\right)=2$$
$$\Leftrightarrow(p_n+2)(p_{n+1}-2)=-4$$
$$\Leftrightarrow p_{n+1}=2-\frac{4}{p_n+2}$$

である。 $p_1=1$ であるから、

$$p_2=\frac{2}{3}, p_3=\frac{2}{4}, p_4=\frac{2}{5}$$

より、

$$p_n=\frac{2}{n+1}(n=1, 2, \dots)\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

と推測できる。これを帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$p_1=\frac{2}{2}=1$$

となりたしかに成り立っている。

[2] $n=k$ で①が成り立つと仮定する

このとき $p_k=\frac{2}{k+1}$ であるから、

$$p_{k+1}=2-\frac{4}{\frac{2}{k+1}+2}$$
$$=2-\frac{2(k+1)}{k+2}$$
$$=\frac{2}{k+2}$$

となる。よって $n=k+1$ でも②は成り立つ。

以上[1], [2]より帰納法は完結し、②は示された。

よってこの結果と条件(ii)より、

$$q_n=\frac{1}{(n+1)^2}(n=1, 2, \dots)$$

を得る。

(答) $p_n=\frac{2}{n+1}(n=1, 2, \dots)$

$$q_n=\frac{1}{(n+1)^2}(n=1, 2, \dots)$$

(4)

(1), (2)の結果より、

$$T>S$$
$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{24}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a}{2}+\frac{5}{3}>\frac{1}{24}(a+2)^3$$
$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{24}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a}{2}+\frac{5}{3}>\frac{a^3}{24}+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}>a$$

であり、これに(3)の結果を代入すると

$$\frac{2}{3}>\frac{2}{n+1}\Leftrightarrow n>2$$

となる。よって $T>S$ となる最小の n は3である。

第2問

(1)

このときの点 P の位置としてありえるのは $2, 0, -2$ のみである。点 P がそれぞれの位置にある確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2, {}_2C_1 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

であるから、求める期待値は、

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3}$

(2)

一回の試行で点 P の座標の絶対値は 1 だけ変化するので、試行の回数と座標の偶奇は一致する。よって試行の回数が 2 回のときと 4 回のときを考えればよい。 2 回の試行で座標が 2 となる確率は、(1)より $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ である。 4 回の試行で座標が 2 となる確率は、

$${}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$$

である。ここで、 2 回の試行後に座標が 2 であり、かつ 4 回の試行後に座標が 2 である確率が

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{81}$$

であることに注意すると、求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{32}{81} - \frac{16}{81} = \frac{52}{81}$$

である。

(答) $\frac{52}{81}$

(3)

点 P の座標が一度も $-2, 2$ にならないということは座標が $-1, 0, 1$ のみであったということである。このようになるのは、偶数回の試行後には座標が常に 0 であるようなとき、すなわち座標 0 の位置にいた後赤が出ればその次に白が、白が出ればその次に赤が出て 0 に再び戻るようなときであるから、求める確率は以下ようになる。

[1] n が奇数のとき

$n-1$ 回目までに先述したような状況が続けばよいので、

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

[2] n が偶数のとき

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となる。

(答) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (n が奇数のとき)

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (n が偶数のとき)

(4)

試行の回数と座標の偶奇は一致するので、 n 回の試行で座標が 2 となるのは、 n が偶数のときのみである。 n 回目で初めて座標が 2 になるので、 $n-2$ 回目では座標は 0 である。よって $n-2$ 回目までは(3)のような状況であり、 $n-1$ 回目と n 回目で赤の球がでればよいから、(3)の結果を踏まえるともとめる確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

である。

(答) 0 (n が奇数のとき)

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (n が偶数のとき)

第3問

(1)

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

である。

(答) $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

(2)

$\overrightarrow{VQ}$ は $\overrightarrow{AC}$ に平行であるから、

$$\overrightarrow{VQ} = s\overrightarrow{CA} = s\vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{VQ} = \frac{2}{3}\vec{b} + \left(\frac{1}{3} - s\right)\vec{c}$$

とかける。また点 V は線分 BR 上にあるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AV} &= \vec{b} + t\overrightarrow{BR} \\ &= \vec{b} + t\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= (1-t)\vec{b} + \frac{2t}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

とかける。よって $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が一次独立であることより、

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = 1-t \\ \frac{1}{3} - s = \frac{2t}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ s = \frac{1}{9} \end{cases}$$

である。よって

$$\overrightarrow{AV} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

であるから、

$$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AV} = \frac{1}{9}\vec{c}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{VQ} = \frac{1}{9}\vec{c}$

(3)

点 T は線分 BR 上にあるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= \vec{b} + i\overrightarrow{BR} \\ &= \vec{b} + i\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= (1-i)\vec{b} + \frac{2i}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

とかける。また点 T は線分 AQ 上にあるから、

$$\overrightarrow{AT} = j\overrightarrow{AQ} = \frac{2j}{3}\vec{b} + \frac{j}{3}\vec{c}$$

とかける。よって、 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が一次独立であることから、

$$\begin{cases} 1-i = \frac{2j}{3} \\ \frac{2i}{3} = \frac{j}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{7i}{3} \\ j = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{3}{7} \\ j = \frac{6}{7} \end{cases}$$

である。以上より、

$$\overrightarrow{AT} = \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$$

である。

(答) $\frac{4}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$

(4)

対称性より、(3)の結果から、

$$\overrightarrow{CS} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB}$$

がいえる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{3}{7}\vec{c} + \frac{2}{7}(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$

(5)

(4)と同様に考え、

$$\overrightarrow{BU} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{BA}$$

がいえる。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AU} &= \overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{5}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{ST} = \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SU} = -\frac{1}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$$

である。いま $\angle BAC = 90^\circ$ より $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ であることから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{ST}|^2 &= \frac{4}{49} \cdot 1 + \frac{1}{49} \cdot 3 = \frac{1}{7} \\ |\overrightarrow{SU}|^2 &= \frac{1}{49} \cdot 1 + \frac{9}{49} \cdot 3 = \frac{4}{7}\end{aligned}$$

であり、

$$|\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\overrightarrow{SU}| = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

である。また

$$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SU} = -\frac{2}{49} \cdot 1 + \frac{3}{49} \cdot 3 = \frac{1}{7}$$

であるから、

$$\cos \angle TSU = \frac{\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SU}}{|\overrightarrow{ST}| \cdot |\overrightarrow{SU}|} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

である。したがって

$$\angle TSU = 60^\circ$$

である。よって $\triangle STU$ の面積は

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{ST}| \cdot |\overrightarrow{SU}| \sin \angle TSU = \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

である。

(答) $|\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\overrightarrow{SU}| = \frac{2}{\sqrt{7}}, \angle TSU = 60^\circ, \triangle STU = \frac{\sqrt{3}}{14}$

第4問

(1)

$X=3^x$ とすると、 X の値域は $0<X$ であり、

$$t=X+\frac{1}{X} \quad (X>0)$$

である。これを $f(X)$ とおくと、

$$f'(X)=1-\frac{1}{X^2}$$

であるから、次の表を得る。

X	(0)	⋯	1	⋯
$f'(X)$		−	0	+
$f(X)$		↘	2	↗

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(X) = \lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(X) = \lim_{X \rightarrow 0} f(X) = \infty$$

である。これより t のとりうる値の範囲は

$$t \geq 2$$

である。

(答) $t \geq 2$

(2)

$$t^2=3^{2x}+3^{-2x}+2$$

$$t^3=3^{3x}+3^{-3x}+3 \cdot 3^x+3 \cdot 3^{-x}=3^{3x}+3^{-3x}+3t$$

であるから、

$$3^{3x}+3^{-3x}=t^3-3t$$

$$3^{2x}+3^{-2x}=t^2-2$$

である。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}(3^{3x}+3^{-3x})-(3^{2x}+3^{-2x})-2 \cdot (3^x+3^{-x})-2 \\ &= \frac{1}{3}(t^3-3t)-(t^2-2)-2t-2 \\ &= \frac{1}{3}t^3-t^2-3t \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad 3^{3x}+3^{-3x}=t^3-3t$$

$$3^{2x}+3^{-2x}=t^2-2$$

$$f(x)=\frac{1}{3}t^3-t^2-3t$$

(3)

$f(x)$ を t で表した

$$f(x)=\frac{1}{3}t^3-t^2-3t$$

を $g(t)$ とおくと

$$g'(t)=t^2-2t-3=(t-3)(t+1)$$

であるから、次表を得る。($\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ である。)

t	2	⋯	3	⋯
$g'(t)$		−	0	+
$g(t)$	$-\frac{22}{3}$	↘	−9	↗

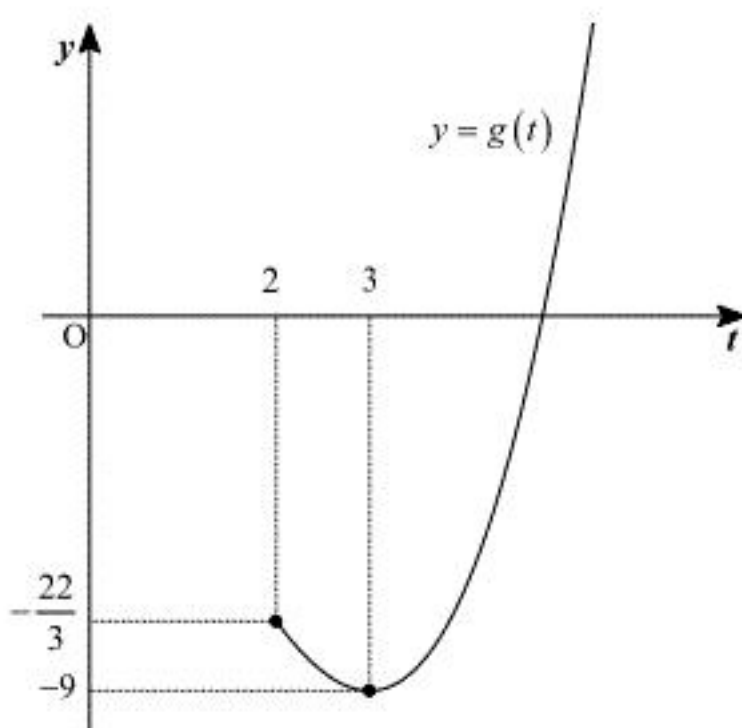
したがって $f(x)$ の最小値は、

$$\begin{aligned} g(3) &= \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 \\ &= -9 \end{aligned}$$

である。

(答) −9

(4)



$y=g(t)$ のグラフは上図のようにになっている。よって $a=g(t)$ をみたす t の個数は、

$a<-9$ のとき 0 個

$a=-9$ のとき 1 個

$-9< a < -\frac{22}{3}$ のとき 2 個

$a=-\frac{22}{3}$ のとき 2 個 (一方の解が 2)

$a>-\frac{22}{3}$ のとき 1 個

である。 $t=X+\frac{1}{X}=3^x+\frac{1}{3^x}$ であり、また X と x の値は 1 対 1 対応であるから、

$t=2$ のとき x は 1 つ定まる。

$t(t>2)$ が 1 つ定まるとこれに対応する x は 2 つ定まる。

以上より $f(x)=a$ を満たす x の個数は、

$a<-9$ のとき 0 個

$a=-9$ のとき 2 個

$-9< a < -\frac{22}{3}$ のとき 4 個

$a=-\frac{22}{3}$ のとき 3 個

$a>-\frac{22}{3}$ のとき 2 個

である。

(答) $a<-9$ のとき 0 個

$a=-9, a>-\frac{22}{3}$ のとき 2 個

$a=-\frac{22}{3}$ のとき 3 個

$-9< a < -\frac{22}{3}$ のとき 4 個