

第1問

問1

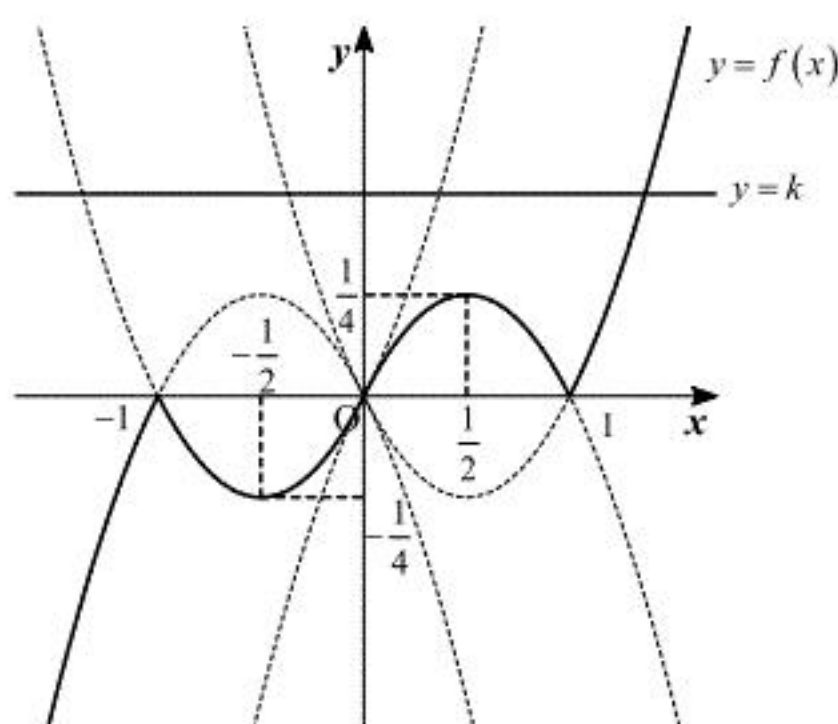
関数 $f(x)$ を $f(x) = x|1 - |x||$ とおく。方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数について、 xy 平面上における曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の交点の個数を考えることで求めることにする。ここで、

$$f(-x) = -x|1 - |-x|| = -x|1 - |x|| = -f(x)$$

であるから、曲線 $y = f(x)$ のグラフは原点对称な図形である。よって、以下 $x \geq 0$ の範囲で考えることにする。このとき、

$$f(x) = x|1 - |x|| = |x||1 - x| = |x(1 - x)|$$

であるから、この範囲においては放物線 $y = x(1 - x)$ のグラフの $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返した図形になる。したがって、 $y = f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数は、曲線 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ のグラフの共有点の個数に一致するため、その個数は

$$k < -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} < k \text{ のとき } 1 \text{ 個}, k = -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \text{ のとき } 2 \text{ 個}, -\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4} \text{ のとき } 3 \text{ 個}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad k < -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} < k \text{ のとき } 1 \text{ 個}, k = -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \text{ のとき } 2 \text{ 個}, -\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4} \text{ のとき } 3 \text{ 個}$$

問2

(i), (ii), (iii)の各条件から a, b, c の間に成立する関係式を導出する。

(i)

この袋から1個の玉を取り出すとき、赤玉が出る確率は a, b, c を用いて

$$\frac{a}{a+b+c}$$

と表せるから、これが $\frac{1}{2}$ と等しいとき

$$\frac{a}{a+b+c} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a+b+c = 2a$$

$$\Leftrightarrow a = b+c \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

(ii)

この袋から2個の玉を同時に取り出すとき、赤玉と白玉が1個ずつ出る確率は a, b, c を用いて

$$\frac{ab}{\binom{a+b+c}{2}} = \frac{2ab}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$$

と表せるから、これが $\frac{1}{7}$ と等しいとき

$$\frac{2ab}{(a+b+c)(a+b+c-1)} = \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ab}{2a(2a-1)} = \frac{1}{7} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{2a-1}{7} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。

(iii)

この袋から3個の玉を同時に取り出すとき、赤玉と白玉と青玉が1個ずつ出る確率は a, b, c を用いて

$$\frac{abc}{\binom{a+b+c}{3}} = \frac{6abc}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)}$$

と表せるから、これが $\frac{6}{35}$ と等しいとき

$$\frac{6abc}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)} = \frac{6}{35}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6abc}{2a(2a-1)(2a-2)} = \frac{6}{35} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7} \cdot \frac{3c}{2a-2} = \frac{6}{35} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{4a-4}{5} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

以上(i), (ii), (iii)より得られた連立方程式①, ②, ③を解くと

$$\begin{cases} a = b+c \\ b = \frac{2a-1}{7} \\ c = \frac{4a-4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2a-1}{7} + \frac{4a-4}{5} \\ b = \frac{2a-1}{7} \\ c = \frac{4a-4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 11, b = 3, c = 8$$

と a, b, c の値が求まる。

第2問

(1)

関数 $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ ($a_1, a_2, a_3<0$) について、その導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=3x^2+2a_1x+a_2$$

であるから、2 次方程式 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a_1^2-3a_2>0\ (\because a_2<0)$$

となるから、2 次方程式 $f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解を持つことがわかる。その 2 つの解を α, β ($\alpha>\beta$) とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{2a_1}{3}\ (>0) \\ \alpha\beta=\frac{a_2}{3}\ (<0) \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} -\alpha<\beta \\ \alpha>0, \beta<0 \end{cases}\ (\because a_1<0, a_2<0, \alpha>\beta)$$

となるから、 $f'(x)=0$ は正の実数解と負の実数解を 1 つずつもち、 $-\alpha<\beta$ が成立することが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より、導関数 $f'(x)$ は実数 α, β ($\alpha>0>\beta$) を用いて

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表せるため、 $x\geq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようなになる。

x	0	...	α	...	(∞)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	a_3	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	(∞)

上の増減表において

$$f(\alpha)<a_3<0$$

であることから、 $f(x)=0$ の正の実数解は $x>\alpha$ の範囲にただ 1 つ存在することがわかる。

(証明終)

(3)

$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ より、 $f(-x)=-x^3+a_1x^2-a_2x+a_3$ であるから

$$f(x)+f(-x)=2a_1x^2+2a_3$$

である。ここで、 $a_1<0, a_3<0$ であることから、任意の実数 x について

$$f(x)+f(-x)<0$$

となることがわかる。

(証明終)

(4)

(2)の増減表より、 $x\geq p$ のとき $f(x)\geq 0$ であるから、 $-x\geq p\ (\Leftrightarrow x\leq -p)$ のとき $f(-x)\geq 0$ である。ここで(3)の結果を用いると、 $x\leq -p$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x)&<0 \\ \Leftrightarrow f(x)&<-f(-x)(\leq 0) \\ \therefore f(x)&<0 \end{aligned}$$

となることが示される。

(証明終)

第3問

(1)

点 $P(x_1, y_1)$ が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上にあることから, x_1, y_1 は関係式

$$\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_1^2 = 1 - \frac{x_1^2}{4}$$

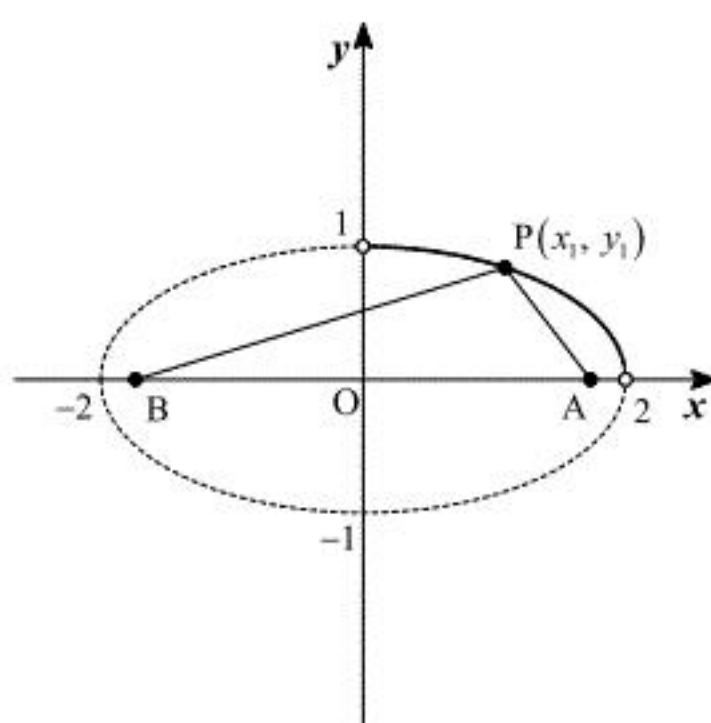
を満たす。よって, $|\overline{BP}|$ は

$$\begin{aligned} |\overline{BP}| &= \sqrt{(x_1 + \sqrt{3})^2 + y_1^2} \\ &= \sqrt{(x_1 + \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_1^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1 + 4} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2 \quad (\because x_1 > 0) \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad |\overline{BP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2$$

(2)



点 $P(x_1, y_1)$ は $x_1 > 0, y_1 > 0$ より上図の実線上に存在するため, x_1 は $0 < x_1 < 2$ を満たす。よつ

て, $|\overline{AP}|$ についても $|\overline{BP}|$ と同様に x_1 を用いて表すと

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= \sqrt{(x_1 - \sqrt{3})^2 + y_1^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1 + 4} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - 2\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2 \quad (\because 0 < x_1 < 2) \end{aligned}$$

となるため, (1)の結果と合わせて

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2\right) = 4$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad |\overline{AP}| + |\overline{BP}| = 4$$

(3)

接線 l は y 軸に平行でないため, その傾きを m とおくと, 接線 l の方程式は

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

と表せる。これが楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に接するのは, 2 式より y を消去して得られる 2 次方程式

$$\frac{x^2}{4} + (mx - mx_1 + y_1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(m^2 + \frac{1}{4}\right)x^2 + 2m(-mx_1 + y_1)x + (-mx_1 + y_1)^2 - 1 = 0$$

が $x = x_1$ を重解に持つときである。したがって, 解と係数の関係より

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{m(-mx_1 + y_1)}{m^2 + \frac{1}{4}} \\ \Leftrightarrow m^2x_1 + \frac{1}{4}x_1 &= m^2x_1 - my_1 \\ \Leftrightarrow m &= -\frac{x_1}{4y_1} \quad (\because y_1 > 0) \end{aligned}$$

と m が求まるから, 接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{x_1}{4y_1}(x - x_1) + y_1 \\ \Leftrightarrow y_1y &= -\frac{x_1}{4}(x - x_1) + y_1^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x_1x}{4} + y_1y &= 1 \quad \left(\because \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1\right) \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{x_1x}{4} + y_1y = 1$$

(4)

(3)の結果より, 直線 l の法線ベクトルの1つとして

$$\vec{n} = \left(\frac{x_1}{4}, y_1\right)$$

とおくと, $\overline{AP}$ と $\vec{n}$ のなす角 α ($0 \leq \alpha \leq \pi$)について

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AP} \cdot \vec{n}}{|\overline{AP}| |\vec{n}|} = \frac{(x_1 - \sqrt{3}, y_1) \cdot \left(\frac{x_1}{4}, y_1\right)}{\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right) |\vec{n}|} = \frac{\left(\frac{x_1^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 + y_1^2\right)}{\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right) |\vec{n}|} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x_1}{\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right) |\vec{n}|} = \frac{1}{2|\vec{n}|}$$

である。また, $\overline{BP}$ と $\vec{n}$ のなす角 β ($0 \leq \beta \leq \pi$)について

$$\cos \alpha = \frac{\overline{BP} \cdot \vec{n}}{|\overline{BP}| |\vec{n}|} = \frac{(x_1 + \sqrt{3}, y_1) \cdot \left(\frac{x_1}{4}, y_1\right)}{\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right) |\vec{n}|} = \frac{\left(\frac{x_1^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 + y_1^2\right)}{\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right) |\vec{n}|} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_1}{\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right) |\vec{n}|} = \frac{1}{2|\vec{n}|}$$

である。よって, $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ かつ $\cos \alpha = \cos \beta$ となることから

$$\alpha = \beta$$

となり, 題意が示された。

(証明終)

第4問

(1)

関数 $y=e^x$ を微分すると

$$y'=e^x$$

となるから、点 $A(1, e)$ における接線 l の傾きは e である。よって、接線 l の方程式は

$$y=e(x-1)+e \Leftrightarrow y=ex$$

となり、点 $B(b, 0)$ は接線 l と x 軸との交点であるから、 b の値は

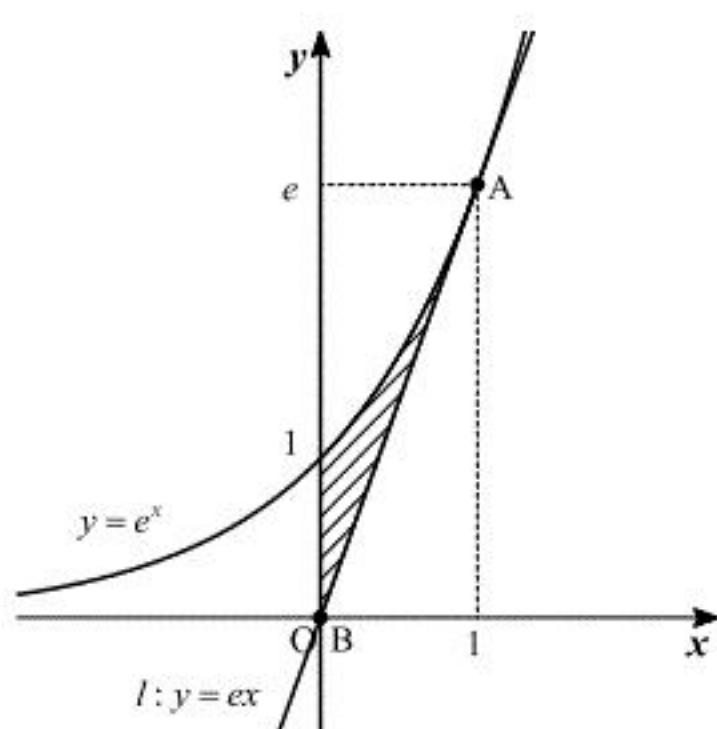
$$0=eb \Leftrightarrow b=0$$

と求まる。

(答) $b=0$

(2)

図形 D は下図の斜線部である。



よって、図形 D の面積 S は

$$S=\int_0^1 e^x dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e = \left[e^x \right]_0^1 - \frac{e}{2} = (e-1) - \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - 1$$

と求まる。

(答) $S=\frac{e}{2}-1$

(3)

定積分 $\int_1^e (\log y)^2 dy$ の値は、部分積分を用いると

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log y)^2 dy &= \left[y(\log y)^2 \right]_1^e - \int_1^e y \cdot \frac{1}{y} \cdot 2 \log y dy \\ &= e - 2 \int_1^e \log y dy \\ &= e - 2 \left([y \log y]_1^e - \int_1^e dy \right) \\ &= e - 2 \{ e - (e-1) \} \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $e-2$

(4)

図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot e - \int_1^e \pi x^2 dy$$

と立式できる。ここで、

$$y=e^x \Leftrightarrow x=\log y$$

であるから、(3)の結果を用いることにより V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi e - \int_1^e \pi (\log y)^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \pi e - \pi (e-2) \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} e \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $V=2\pi \left(1 - \frac{1}{3} e \right)$