

第1問

(1)

放物線 C_1 を表す式 $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$ となることから、 C_1 上の点 $P(p, p^2)$ における

接線 l の傾きは $2p$ である。よって、接線 l の方程式は

$$y = 2p(x - p) + p^2 \Leftrightarrow y = 2px - p^2$$

である。

(答) $y = 2px - p^2$

(2)

接線 $l: y = 2px - p^2$ が放物線 $C_2: y = \frac{1}{2}(x - a)^2 + b$ にも接するのは、 y を消去してできた2次方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x - a)^2 + b &= 2px - p^2 \\ \Leftrightarrow (x - a)^2 - 4px + 2p^2 + 2b &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(a + 2p)x + a^2 + 2b + 2p^2 &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つときである。よって、この2次方程式の判別式を D とすると、求める条件は

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 2p)^2 - (a^2 + 2b + 2p^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4ap - 2b + 2p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + 2ap - b &= 0 \\ \Leftrightarrow p = -a \pm \sqrt{a^2 + b} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

である。

(答) $p = -a \pm \sqrt{a^2 + b}$

(3)

(2)の結果より $p_1 = -a - \sqrt{a^2 + b}$, $p_2 = -a + \sqrt{a^2 + b}$ とおくと、(1)の結果から C_1 , C_2 の両方に接する直線の方程式はそれぞれ

$$y = 2p_1x - p_1^2, y = 2p_2x - p_2^2$$

であるから、点 Q の x 座標は

$$\begin{aligned} 2p_1x - p_1^2 &= 2p_2x - p_2^2 \\ \Leftrightarrow 2(p_1 - p_2)x &= p_1^2 - p_2^2 \\ \Leftrightarrow 2(p_1 - p_2)x &= (p_1 - p_2)(p_1 + p_2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (\because p_1 < p_2) \\ \therefore x &= -a \end{aligned}$$

となる。このとき、点 Q の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= 2p_1x - p_1^2 \\ &= 2(-a - \sqrt{a^2 + b}) \cdot (-a) - (-a - \sqrt{a^2 + b})^2 \\ &= (-a - \sqrt{a^2 + b})(-a + \sqrt{a^2 + b}) \\ &= -b \end{aligned}$$

となるから、点 Q の座標は $(-a, -b)$ であることがわかる。

(答) $Q(-a, -b)$

(4)

放物線 C_2 の頂点を点 R とおくと、その座標は (a, b) である。ここで、(3)の結果より点 Q と点 R は原点に関して点対称であることがわかるから、点 R が曲線 $y = e^{-2x^2}$ 上を動くとき、点 Q の軌跡は式

$$-y = e^{-2(-x)^2} \Leftrightarrow y = -e^{-2x^2}$$

で表されるから、関数 $f(x)$ は $f(x) = -e^{-2x^2}$ と求まる。関数 $f(x)$ の導関数は

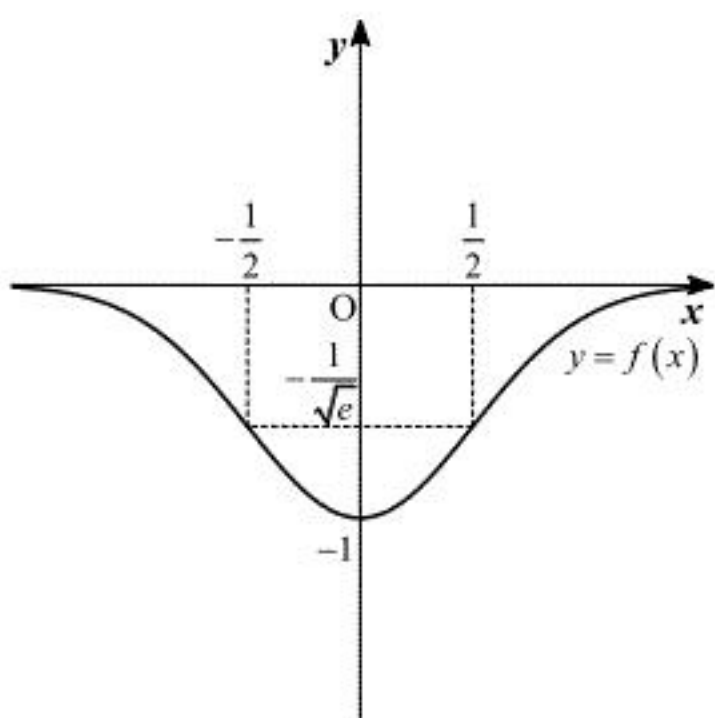
$$\begin{aligned} f'(x) &= 4xe^{-2x^2} \\ f''(x) &= 4e^{-2x^2} - 16x^2e^{-2x^2} = -4(2x + 1)(2x - 1)e^{-2x^2} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減と凹凸は以下の表のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(∞)
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	(0)

$$\left(\because \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-e^{-2x^2}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{e^{2x^2}} \right) = 0 \right)$$

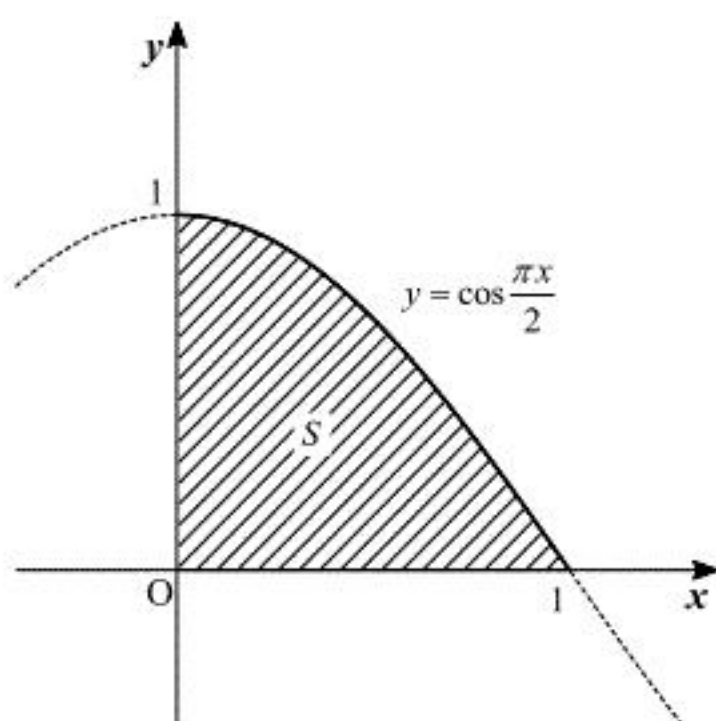
したがって、点 Q の軌跡の概形は下図のようになる。



(答) 前図

第2問

(1)



図形 S は上図の斜線部であるから、 S の面積は

$$\int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx = \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \cdot 1 - \frac{2}{\pi} \cdot 0 = \frac{2}{\pi}$$

である。

(答) $\frac{2}{\pi}$

(2)

図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積は

$$\int_0^1 \pi \cos^2 \frac{\pi x}{2} dx = \pi \int_0^1 \frac{1 + \cos \pi x}{2} dx = \pi \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{2\pi} \sin \pi x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{2}$

(3)

部分積分法を用いることで

$$\int x^2 \sin x dx = \int x^2 (-\cos x)' dx = -x^2 \cos x - \int 2x (-\cos x) dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

$$\int x \cos x dx = \int x (\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる。したがって、求める不定積分は

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。

(答) $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})$

(4)

曲線 C は変数 t を媒介変数として

$$x = \frac{2}{\pi} t, y = \cos t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

と表されることから、 y と t の関係は

$$dy = -\sin t dt$$

y	0	→	1
t	$\frac{\pi}{2}$	→	0

となる。よって、図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積は、(3)の結果を用いることで

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi x^2 dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi \cdot \frac{4}{\pi^2} t^2 (-\sin t) dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t dt \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{\pi} (\pi - 2) \\ &= 4 - \frac{8}{\pi} \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $4 - \frac{8}{\pi}$