

## 〔1〕

(1)

$t = x - 2$  とおくと、与えられた定積分の値は

$$\int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3) dx = \int_{-1}^1 (t-1)t(t+1) dt$$

を計算すれば求まる。ここで、 $f(t) = (t-1)t(t+1)$  とおくと

$$f(-t) = (-t-1)(-t)(-t+1) = -(t+1)t(t-1) = -f(t)$$

より、 $f(t)$  は奇関数であることがわかる。したがって、

$$\int_{-1}^1 (t-1)t(t+1) dt = 0$$

$$\therefore \int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3) dx = 0$$

である。

(答) 0

(2)

方程式

$$|x^2 - 3| = 2x \quad \cdots \textcircled{1}$$

の解を  $x$  の値で場合分けすることにより求める。

[1]  $x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq x$  のとき

①の解は

$$x^2 - 3 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3$$

である。

[2]  $x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$  のとき

①の解は

$$-(x^2 - 3) = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = 1$$

である。

以上[1], [2]より、①の解は  $x = 1, 3$  である。

(答)  $x = 1, 3$

(3)

与えられた不等式を変形すると

$$(\log_a x)^2 - \log_a x^3 + 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_a x)^2 - 3\log_a x + 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_a x - 1)(\log_a x - 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < \log_a x < 2$$

となるから、 $a$  が1でない自然数であるとき

$$a < x < a^2$$

である。これを満たす自然数  $x$  がただ1つ存在するとき、 $a, x, a^2$  がいずれも自然数であることから

$$x = a + 1 = a^2 - 1$$

が成り立つ。したがって、

$$a + 1 = a^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \quad (\because a > 0)$$

となり、確かに  $a$  は自然数となるから  $a = 2$  である。

(答)  $a = 2$

## [2]

(1)

与えられた条件より、 $\triangle OAB$  の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

と求まる。

(答)  $\sqrt{3}$

(2)

内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c}$  は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle BOC = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \angle AOC = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

と計算できる。

(答)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = -3$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = -3$

(3)

$\overrightarrow{CH}$  は  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて 1 通りに表せる。以下  $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$  が条件を満たすことを示す。

[1] 点 H は平面 OAB 上に存在すること

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

より、 $\overrightarrow{OH}$  は  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  のみを用いて表せるから、点 H は平面 OAB 上に存在する。

[2] 線分 CH は点 C から平面 OAB に下ろした垂線であること

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 - (-3) = 0$$

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - (-3) = 0$$

かつ  $|\overrightarrow{CH}| \neq 0$ ,  $|\overrightarrow{OA}| \neq 0$ ,  $|\overrightarrow{OB}| \neq 0$  であることから、 $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OB}$  となるため、線分

CH は点 C から平面 OAB に下ろした垂線である。

以上[1], [2]より、 $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$  が示された。

(4)

線分 CH の長さは

$$|\overrightarrow{CH}|^2 = \left|-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 + 1 + 9 + 1 - 3 - 3 = 6$$

$$\therefore |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{6} (> 0)$$

であるから、 $\triangle OAB$  の面積を  $S$  とおくと四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{CH}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2}$$

と求まる。

(答)  $\sqrt{2}$

### [3]

(1)

$a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) より,  $n=1$  を代入すると

$$a_1 = - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = - \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = - \left[ x - \log(1+x) \right]_0^1 = \log 2 - 1$$

となる。

(証明終)

(2)

$b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ),  $a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) より

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 x^n dx \\ &= (-1)^{n+1} \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

$n \geq 2$  のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

であるから, (1), (2)の結果を用いると

$$a_n = \log 2 - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \log 2 - 1 + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} = \log 2 - 1 - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

となる。

(証明終)

(4)

$x \geq 0$  のとき  $\frac{1}{1+x} \leq 1$  であるから, 両辺に  $x^n (\geq 0)$  をかけて

$$\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

となる。また,  $0 \leq x \leq 1$  において  $0 \leq \frac{x^n}{1+x}$  であることから,  $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \geq 0$  である。よって,

$$|a_n| = \left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore |a_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

となることがわかる。

(証明終)

(5)

(3)と(4)の結果を合わせて

$$0 \leq \left| \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

となり, また  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$  であることから, はさみうちの原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| &= 0 \\ \therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2 \end{aligned}$$

であることがわかる。

(答)  $\log 2$

〔4〕

(1)

関数  $y = \log x$  の導関数は

$$y' = \frac{1}{x}$$

であるから、点  $A(a, \log a)$  における接線の傾きは  $\frac{1}{a}$  である。よって、法線  $l$  の傾きは  $-a$  となるから、 $l$  の方程式は

$$y = -a(x - a) + \log a \Leftrightarrow y = -ax + a^2 + \log a$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -ax + a^2 + \log a$$

(2)

点  $B(b, \log b)$  における法線  $m$  の方程式は、(1)の結果について  $a$  を  $b$  に置き換えることにより

$$y = -bx + b^2 + \log b$$

となる。したがって、 $l$  と  $m$  の交点  $P$  の  $x$  座標は

$$\begin{aligned} -ax + a^2 + \log a &= -bx + b^2 + \log b \\ \Leftrightarrow (a - b)x &= a^2 - b^2 + \log a - \log b \\ \Leftrightarrow x &= a + b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \quad (\because a \neq b) \end{aligned}$$

と求まり、 $y$  座標は

$$\begin{aligned} y &= -a \left( a + b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right) + a^2 + \log a \\ &= \left( -a^2 - ab - \frac{a \log a - a \log b}{a - b} \right) + a^2 + \log a \\ &= -ab + \frac{a \log b - b \log a}{a - b} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P \left( a + b + \frac{\log a - \log b}{a - b}, -ab + \frac{a \log b - b \log a}{a - b} \right)$$

(3)

(2)の結果より、 $d^2$  は  $a, b$  を用いて

$$\begin{aligned} d^2 &= AP^2 \\ &= \left\{ \left( a + b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right) - a \right\}^2 + \left\{ \left( -ab + \frac{a \log b - b \log a}{a - b} \right) - \log a \right\}^2 \\ &= \left( b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right)^2 + \left( -ab + \frac{a \log b - a \log a}{a - b} \right)^2 \\ &= \left( b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right)^2 + (-a)^2 \left( b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right)^2 \\ &= (a^2 + 1) \left( b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right)^2 \end{aligned}$$

と表せるから、 $d$  は  $a, b$  を用いて

$$d = \sqrt{a^2 + 1} \left| b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right|$$

と表せる。ここで、 $a < b$  のとき  $\log a < \log b$  となり、 $b < a$  のとき  $\log b < \log a$  であることから、 $a, b$  の値にかかわらず  $\frac{\log a - \log b}{a - b} > 0$  が成り立つ。よって、 $b > 0$  と合わせて

$$b + \frac{\log a - \log b}{a - b} > 0$$

であることから、 $d$  は

$$d = \sqrt{a^2 + 1} \left( b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right)$$

となる。

(証明終)

(4)(i)

関数  $f(x)$  を  $f(x) = \log x$  とおくと、微分の定義より  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(a) = \frac{1}{a}$  であることから、 $r$  は  $a$  を用いて

$$r = \lim_{b \rightarrow a} d = \lim_{b \rightarrow a} \sqrt{a^2 + 1} \left( b + \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right) = \sqrt{a^2 + 1} \left( a + \frac{1}{a} \right) = \frac{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{a}$$

と表せる。

(証明終)

(ii)

関数  $g(a)$  を  $g(a) = \frac{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{a}$  とおくと、その導関数  $g'(a)$  は

$$g'(a) = \frac{2a \cdot \frac{3}{2} (a^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot a - (a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot 1}{a^2} = \frac{(2a^2 - 1)\sqrt{a^2 + 1}}{a^2} = \frac{2 \left( a + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( a - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{a^2 + 1}}{a^2}$$

であるから、 $a > 0$  における  $g(a)$  の増減表は以下のようになる。

|         |                                                                                     |            |                      |            |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|----------------------|------------|
| $a$     | (0)                                                                                 | ...        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ...        |
| $g'(a)$ |  | -          | 0                    | +          |
| $g(a)$  |  | $\searrow$ | 最小                   | $\nearrow$ |

したがって、 $r = g(a)$  は  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  のとき、最小値

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad r \text{ の最小値: } \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ そのときの } a \text{ の値: } \frac{\sqrt{2}}{2}$$