

第1問

問1

$$\frac{a+b}{6} = \frac{b+c}{5} = \frac{c+a}{7} = k \ (>0)$$

とおくと、 a, b, c は

$$\begin{cases} a+b=6k \\ b+c=5k \\ c+a=7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4k \\ b=2k \\ c=3k \end{cases}$$

と表せる。したがって、 $\triangle ABC$ に余弦定理を用いることにより $\cos A$ は

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4k^2 + 9k^2 - 16k^2}{2 \cdot 2k \cdot 3k} = -\frac{1}{4}$$

と求まり、 $0 < A < 180^\circ$ より $\sin A$ は

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

であることがわかる。よって、 $\triangle ABC$ の面積が $3\sqrt{15}$ のとき k は

$$\begin{aligned} 3\sqrt{15} &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{15} &= \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot 3k \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \Leftrightarrow k^2 &= 4 \\ \therefore k &= 2 \ (>0) \end{aligned}$$

となるから、 a は

$$a = 4k = 8$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \cos A = -\frac{1}{4}, \quad a = 8$$

問2

(1)

与えられた関係式

$$S_n = 2a_n - 2^n \quad \cdots \text{①}$$

に $n=1$ を代入すると、 $S_1 = a_1$ より

$$a_1 = 2a_1 - 2 \Leftrightarrow a_1 = 2$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_1 = 2$$

(2)

①より $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2^{n+1}$ であるから、 a_{n+1} と a_n の関係式は

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (2a_{n+1} - 2^{n+1}) - (2a_n - 2^n) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_{n+1} - 2a_n - 2^n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_n + 2^n \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

(3)

②の両辺を 2^n で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^n} = \frac{a_n}{2^{n-1}} + 1$$

となるから、ここで $b_n = \frac{a_n}{2^{n-1}}$ とおくと数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 \left(= \frac{a_1}{2^0} \right) = 2$ 、公差1の等差数列となり、

その一般項は $b_n = n+1$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2^{n-1}} &= n+1 \\ \therefore a_n &= (n+1)2^{n-1} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad a_n = (n+1)2^{n-1}$$

第2問

(1)

$\overrightarrow{OA} = (a, a^2)$, $\overrightarrow{OB} = (b, b^2)$ より $\overrightarrow{AB} = (b-a, b^2-a^2)$ であり, $a > 0, b < 0$ より $a \neq 0, b-a \neq 0$ で

あることから $|\overrightarrow{OA}| \neq 0$ かつ $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$ である。したがって,

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

であるから, b は a を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a, a^2) \cdot (b-a, b^2-a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(b-a) + a^2(b^2-a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(b-a)\{1+a(a+b)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1+a(a+b) &= 0 \quad (\because a \neq 0, b-a \neq 0) \\ \Leftrightarrow b &= -\left(a + \frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad b = -\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

(2)

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$ であることから, $\triangle OAB$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{AB}|$$

と表せる。ここで(1)の結果より, $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{AB}|$ を a のみを用いて表すと

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{a^2 + a^4} \\ &= a\sqrt{1+a^2} \quad (\because a > 0) \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2} \\ &= |b-a| \sqrt{1+(a+b)^2} \\ &= \left(2a + \frac{1}{a}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} \quad \left(\because a > 0, b = -\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) \\ &= \frac{(2a^2+1)\sqrt{1+a^2}}{a^2}\end{aligned}$$

となるから, S を a のみを用いて表すと

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{1+a^2} \cdot \frac{(2a^2+1)\sqrt{1+a^2}}{a^2} \\ &= \frac{(2a^2+1)(a^2+1)}{2a}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AB}| = \frac{(2a^2+1)\sqrt{1+a^2}}{a^2}, \quad \triangle OAB = \frac{(2a^2+1)(a^2+1)}{2a}$$

(3)

$|\overrightarrow{OB}| = 3\sqrt{10}$ のとき, b の値は

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OB}| &= 3\sqrt{10} \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OB}|^2 &= 90 \\ \Leftrightarrow b^2 + b^4 &= 90 \\ \Leftrightarrow (b^2-9)(b^2+10) &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2-9 &= 0 \\ \therefore b &= -3 \quad (\because b < 0)\end{aligned}$$

であるから, 点 B の座標は

$$B(-3, 9)$$

である。また, (1)の結果より a の値は

$$\begin{aligned}-3 &= -\left(a + \frac{1}{a}\right) \\ \Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 &= 0 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\because 3 - \sqrt{5} > 0)\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad B(-3, 9), \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

第3問

(1)

放物線 C の方程式 $y = x^2 - \frac{1}{2}ax + 2$ を微分すると

$$y' = 2x - \frac{1}{2}a$$

となるから、放物線 C 上の点 $P\left(a, \frac{1}{2}a^2 + 2\right)$ における接線 l_1 の傾きは

$$2a - \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$$

である。よって、接線 l_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}a(x - a) + \frac{1}{2}a^2 + 2 \\ \therefore y &= \frac{3}{2}ax - a^2 + 2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad l_1: y = \frac{3}{2}ax - a^2 + 2$$

(2)

直線 l_1 の傾きが $\frac{3}{2}a$ であることから、それに垂直な直線 l_2 の傾きは $-\frac{2}{3a}$ である。したがって、直線 l_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3a}(x - a) + \frac{1}{2}a^2 + 2 \\ \therefore y &= -\frac{2}{3a}x + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad l_2: y = -\frac{2}{3a}x + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3}$$

(3)

放物線 C と直線 l_2 の交点の x 座標は、2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{2}ax + 2 &= -\frac{2}{3a}x + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}\right)x - \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

の実数解である。放物線 C と直線 l_2 の交点の 1 つは点 P であるから、この 2 次方程式は $x = a$ を解に持つ。したがって、点 Q の x 座標を b とすると、解と係数の関係より

$$a + b = \frac{1}{2}a - \frac{2}{3a} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}$$

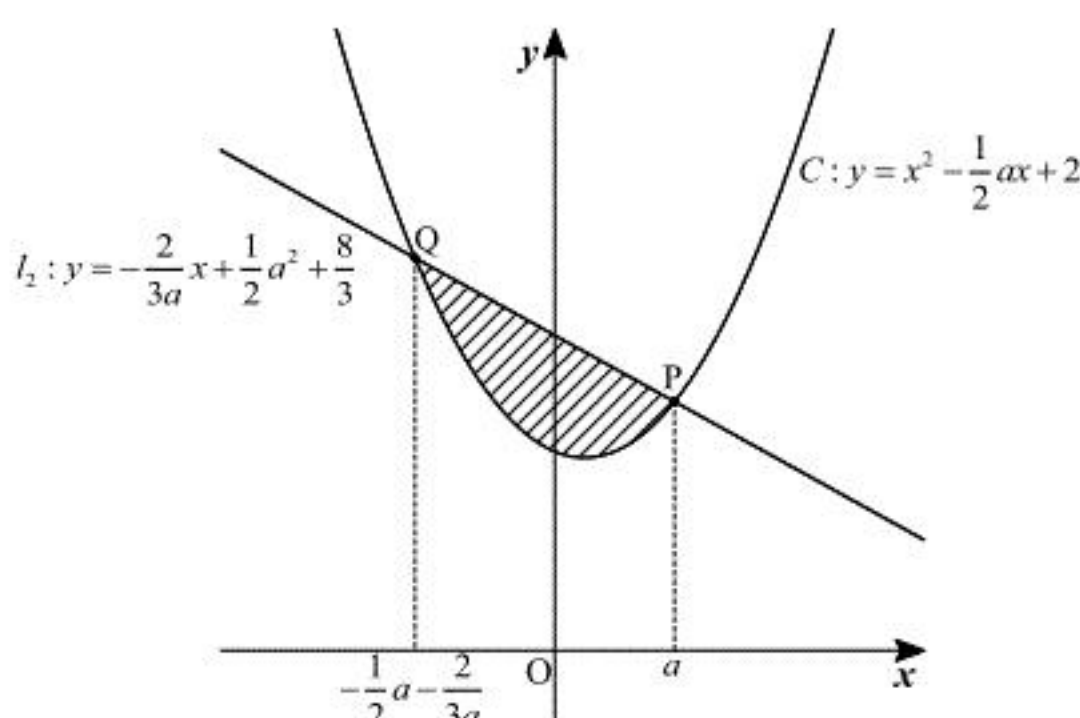
となるから、点 Q の x 座標は $-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}$ であり、(2)の結果より y 座標は

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3a}b + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3} &= -\frac{2}{3a}\left(-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}\right) + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3} \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{4}{9a^2} + 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad Q\left(-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}, \frac{1}{2}a^2 + \frac{4}{9a^2} + 3\right)$$

(4)



$a > 0$ より $-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a} < 0$ であるから、 $-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a} < a$ である。よって、上図より放物線 C と直線 l_2 で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}}^a \left\{ \left(-\frac{2}{3a}x + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3} \right) - \left(x^2 - \frac{1}{2}ax + 2 \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}}^a - (x - a) \left\{ x - \left(-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a} \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ a - \left(-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2}a + \frac{2}{3a} \right)^3 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2}a + \frac{2}{3a} \right)^3$$

(5)

(4)の結果より、 $S(a)$ が最小値をとるのは $\frac{3}{2}a + \frac{2}{3a}$ が最小値をとるときである。ここで、 $a > 0$

より $\frac{3}{2}a > 0$, $\frac{2}{3a} > 0$ であることから、相加平均と相乗平均に関する不等式より

$$\frac{3}{2}a + \frac{2}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}a \cdot \frac{2}{3a}} = 2$$

であり、等号が成立するのは

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a &= \frac{2}{3a} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{4}{9} \\ \therefore a &= \frac{2}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

のときであることがわかる。したがって、 $a = \frac{2}{3}$ のとき $S(a)$ は最小値

$$S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad S(a) \text{ の最小値: } \frac{4}{3}, \text{ そのときの } a \text{ の値: } \frac{2}{3}$$

第4問

(1)

関数 $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ ($a_1, a_2, a_3<0$) について、その導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=3x^2+2a_1x+a_2$$

であるから、2 次方程式 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a_1^2-3a_2>0\ (\because a_2<0)$$

となるから、2 次方程式 $f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解を持つことがわかる。その 2 つの解を α, β ($\alpha>\beta$) とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{2a_1}{3}\ (>0) \\ \alpha\beta=\frac{a_2}{3}\ (<0) \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} -\alpha<\beta \\ \alpha>0, \beta<0 \end{cases} \ (\because a_1<0, a_2<0, \alpha>\beta)$$

となるから、 $f'(x)=0$ は正の実数解と負の実数解を 1 つずつもち、 $-\alpha<\beta$ が成立することが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より、導関数 $f'(x)$ は実数 α, β ($\alpha>0>\beta$) を用いて

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表せるため、 $x\geq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	α	...	(∞)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	a_3	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	(∞)

上の増減表において

$$f(\alpha)<a_3<0$$

であることから、 $f(x)=0$ の正の実数解は $x>\alpha$ の範囲にただ 1 つ存在することがわかる。

(証明終)

(3)

$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ より、 $f(-x)=-x^3+a_1x^2-a_2x+a_3$ であるから

$$f(x)+f(-x)=2a_1x^2+2a_3$$

である。ここで、 $a_1<0, a_3<0$ であることから、任意の実数 x について

$$f(x)+f(-x)<0$$

となることがわかる。

(証明終)

(4)

(2)の増減表より、 $x\geq p$ のとき $f(x)\geq 0$ であるから、 $-x\geq p\ (\Leftrightarrow x\leq -p)$ のとき $f(-x)\geq 0$

である。ここで(3)の結果を用いると、 $x\leq -p$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x)&<0 \\ \Leftrightarrow f(x)&<-f(-x)(\leq 0) \\ \therefore f(x)&<0 \end{aligned}$$

となることが示される。

(証明終)