

平成 27 年度入学者選抜試験問題

工 学 部

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子の本文は、1 ページから 4 ページまでです。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 監督者の指示にしたがって、解答用紙に大学受験番号を正しく記入してください。
大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点されないことがあります。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3) dx$ を求めよ。

(2) 方程式 $|x^2 - 3| = 2x$ を解け。

(3) a を 1 でない自然数とする。不等式 $(\log_a x)^2 - \log_a x^3 + 2 < 0$ を満たす自然数 x が 1 つだけ存在するとき、 a の値を求めよ。

〔2〕四面体 OABC は、 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $\angle AOC = \angle BOC = \frac{2}{3}\pi$, $OA = OB = 2$, $OC = 3$ を満たす。点 C から平面 OAB に下ろした垂線を CH とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ。

(3) $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$ を示せ。

(4) 四面体 OABC の体積を求めよ。

〔3〕 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数である。

(1) $a_1 = \log 2 - 1$ を示せ。

(2) $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ を示せ。

(3) $a_n = \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を示せ。

(4) $x \geq 0$ のとき $\frac{1}{1+x} \leq 1$ であることを用いて、 $|a_n| \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ を求めよ。

〔4〕 xy 平面上に曲線 $C: y = \log x$ がある。曲線 C 上の異なる 2 点 $A(a, \log a)$, $B(b, \log b)$ における法線をそれぞれ l, m とし, l と m の交点を P とする。線分 AP の長さを d とするとき, 次の問いに答えよ。ただし, 対数は自然対数である。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) P の座標を a, b を用いて表せ。

(3) $d = \sqrt{a^2 + 1} \left(b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right)$ を示せ。

(4) B が A に限りなく近づくときの d の極限値を $r = \lim_{b \rightarrow a} d$ とする。

(i) $r = \frac{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{a}$ を示せ。

(ii) a が $a > 0$ の範囲を動くとき, r の最小値と, そのときの a の値を求めよ。