

第1問

(1)

優勝が決まるまでにBが1勝もしない確率、つまりAが3連勝する確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

となる。よって優勝が決まるまでにBが少なくとも1勝する確率は、この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

となる。

(答) $\frac{19}{27}$

(2)

余事象は5試合目で優勝が決まる確率、つまり4試合目までに両チームが2勝ずつする確率であるから、求める確率は

$$1 - {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

となる。

(答) $\frac{19}{27}$

(3)

1試合目でAチームが勝ち、Aチームが優勝するのは

① 2, 3試合目ともにAチームが勝利する

② 2, 3試合目でAチームとBチームが1勝ずつし、4試合目でAチームが勝利する

③ 2~4試合目でAチームが1勝、Bチームが2勝し、5試合目でAチームが勝利する

の3パターンである。①の確率は(1)より $\frac{8}{27}$ であり、②の確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

であり、③の確率は

$$\frac{2}{3} \cdot {}_3C_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

となるため、求める確率は

$$\frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{8}{81} = \frac{16}{27}$$

となる。

(答) $\frac{16}{27}$

第2問

(1)

$$y = -x^2 + nx \text{ より}$$

$$y' = -2x + n$$

となるから、

$$a = n - 2$$

となる。よって

$$0 \leq a \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n - 2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq n \leq 5$$

となる。よって、 n は自然数であるから

$$n = 2, 3, 4, 5$$

となる。

(答) $n = 2, 3, 4, 5$

(2)

$$y = -\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4}$$

と変形できるから、

$$M = \frac{n^2}{4}$$

となる。よって

$$1 \leq M \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n^2}{4} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq n^2 \leq 20$$

となり、 n は自然数であるから、

$$n = 2, 3, 4$$

となる。

(答) $n = 2, 3, 4$

(3)

放物線 C と直線 $y = -x$ の交点の x 座標は

$$-x^2 + nx = -x$$

$$\Leftrightarrow x\{x - (n+1)\} = 0$$

$$\therefore x = 0, n+1$$

となる。 n は自然数より $0 < n+1$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{n+1} \{-x^2 + nx - (x)\} dx \\ &= -\int_0^{n+1} x\{x - (n+1)\} dx \\ &= \frac{(n+1)^3}{6} \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{(n+1)^3}{6} \leq 36$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^3 \leq 216$$

$$\Leftrightarrow n \leq 5$$

となる。よって n は自然数であるから

$$n = 1, 2, 3, 4, 5$$

となる。

(答) $n = 1, 2, 3, 4, 5$

(4)

$$y = -x^2 + nx = -x(x-n)$$

から、放物線 C は $x = 0, n$ で x 軸と交わる。よって $n \geq 7$ のとき

$$\begin{aligned} T &= \int_6^n (-x^2 + nx) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{n}{2}x^2 \right]_6^n \\ &= \frac{n^3}{6} - 18n + 72 \end{aligned}$$

となるから

$$T \leq 72$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^3}{6} - 18n + 72 \leq 72$$

$$\Leftrightarrow n(n-6\sqrt{3})(n+6\sqrt{3}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < n \leq 6\sqrt{3} \quad (\because n > 0)$$

となる。ここで

$$10 < 6\sqrt{3} < 11$$

であり、 $n \geq 7$ から

$$T \leq 72$$

$$\Leftrightarrow n = 7, 8, 9, 10$$

となる。

(答) $n = 7, 8, 9, 10$

第3問

(1)

余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \\ &= \frac{3+4-5}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AC} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 4 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1, S = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

(2)

点Pは線分BC上の点であるから, 実数 t を用いて

$$\overline{AP} = t\overline{AB} + (1-t)\overline{AC}$$

と表される。また, 点Pは点B, Cと異なる点であるから $0 < t < 1$ であることに注意すると,

$AP = \sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned}|\overline{AP}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow t^2 |\overline{AB}|^2 + 2t(1-t)\overline{AB} \cdot \overline{AC} + (1-t)^2 |\overline{AC}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow 3t^2 + 2t(1-t) + 4(1-t)^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow 5t^2 - 6t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5t-1)(t-1) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{5} (\because 0 < t < 1)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overline{AP} = \frac{1}{5}\overline{AB} + \frac{4}{5}\overline{AC}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overline{AP} = \frac{1}{5}\overline{AB} + \frac{4}{5}\overline{AC}$$

(3)

(2)と仮定より

$$\begin{aligned}AQ:QB &= 1:1 \\ BP:PC &= 4:1\end{aligned}$$

である。メネラウスの定理より

$$\begin{aligned}\frac{PC}{BP} \cdot \frac{RQ}{CR} \cdot \frac{AB}{QA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{RQ}{CR} \cdot 2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{RQ}{CR} &= 2\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}T &= S \cdot \frac{AQ}{AB} \cdot \frac{RQ}{CQ} \\ &= S \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{6}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad T = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

第4問

(1)

与漸化式に $a_n = b_n - 3n$, $a_{n+1} = b_{n+1} - 3(n+1)$ を代入すると

$$\begin{aligned} b_{n+1} - 3(n+1) &= 2(b_n - 3n) + 3n - 3 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 2b_n \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_{n+1} = 2b_n$

(2)

$$b_1 = a_1 + 3 = 2$$

および(1)より, b_n は初項2, 公比2の等比数列であるので

$$b_n = 2^n$$

となる。よって

$$a_n = b_n - 3n = 2^n - 3n$$

となる。

(答) $a_n = 2^n - 3n$

(3)

背理法を用いて示す。ある自然数 n に対し $a_n = 0$ であるとき, (2)の結果より

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^n &= 3n \end{aligned}$$

となるが, n は自然数であるため, 左辺は3を因数に持たないが右辺は3を因数にもつ。よってこのような自然数 n は存在しないので, すべての n について $a_n \neq 0$ が示された。

(証明終)

(4)

$c_n > 0$ のとき

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{nc_n + 1} > 0$$

となり, $c_1 > 0$ より帰納的にすべての自然数 n について $c_n > 0$ である。よって与漸化式の両辺の逆数を考えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{n+1}} &= \frac{1}{c_n} + n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_n} &= n \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{n+1}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{c_{k+1}} - \frac{1}{c_k} \right) + \frac{1}{c_1} \\ &= \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8}(2n+1)^2 \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= \frac{8}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=0$ としても成り立つので

$$c_n = \frac{8}{(2n-1)^2}$$

となる。

(答) $c_n = \frac{8}{(2n-1)^2}$

(5)

(3)より $a_n \neq 0$ であるから, 与漸化式の両辺を a_{n+1} で割ると

$$\frac{d_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\frac{d_n}{a_n}}{n \frac{d_n}{a_n} + 1}$$

となる。これは(4)における c_n を用いると $c_n = \frac{d_n}{a_n}$ となる。よって

$$d_n = a_n \cdot c_n = \frac{8(2^n - 3n)}{(2n-1)^2}$$

となる。

(答) $d_n = \frac{8(2^n - 3n)}{(2n-1)^2}$

第5問

(1)

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$ であるから、 $f'(x)$ は $x=1$ の前後で正から負に符号が変化する。よって
 $f(x)$ は $x=1$ で極値をとり

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{e} \quad (x=1)$$

(2)

$x > 0$ において $y > 0$ であるから、条件より

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_t^{2t} x e^{-x} dx \\ &= \left[-x e^{-x} \right]_t^{2t} + \int_t^{2t} e^{-x} dx \\ &= -2t e^{-2t} + t e^{-t} + \left[-e^{-x} \right]_t^{2t} \\ &= -2t e^{-2t} + t e^{-t} - e^{-2t} + e^{-t} \\ &= (t+1)e^{-t} - (2t+1)e^{-2t} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1(t) = (t+1)e^{-t} - (2t+1)e^{-2t}$$

(3)

$$S_1(t) = \int_0^{2t} f(x) dx - \int_0^t f(x) dx$$

となるから

$$\begin{aligned} S_1'(t) &= 2f(2t) - f(t) \\ &= 4t e^{-2t} - t e^{-t} \\ &= t e^{-2t} (4 - e^t) \end{aligned}$$

となる。よって $S_1(t)$ の増減表は下のようになる。

t	0	...	$2\log 2$	...
$S_1'(t)$		+	0	-
$S_1(t)$			最大	

よって $S_1(t)$ は $t=2\log 2$ で最大値をとり、値は

$$\begin{aligned} S_1(2\log 2) &= (2\log 2 + 1) \cdot \frac{1}{4} - (4\log 2 + 1) \cdot \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{4} \log 2 + \frac{3}{16} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} \log 2 + \frac{3}{16} \quad (t=2\log 2)$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_n(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^{2t} x^n e^{-nx} dx - \int_0^t x^n e^{-nx} dx \right\} \\ &= 2 \cdot (2t)^n e^{-2nt} - t^n e^{-nt} \\ &= 2^{n+1} t^n e^{-2nt} - t^n e^{-nt} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{d}{dt} S_n(t) = 2^{n+1} t^n e^{-2nt} - t^n e^{-nt}$$

(5)

(4)より

$$\frac{d}{dt} S_n(t) = 2^{n+1} t^n e^{-2nt} - t^n e^{-nt} = t^n e^{-2nt} (2^{n+1} - e^{nt})$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_n(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{(n+1)\log 2}{n} \end{aligned}$$

となるから、 $S_n(t)$ の増減は下のようになる。

t	0	...	$\frac{(n+1)\log 2}{n}$	...
$S_n'(t)$		+	0	-
$S_n(t)$			最大	

よって

$$t_n = \frac{(n+1)\log 2}{n}$$

となり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\log 2}{n} = \log 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t_n = \frac{(n+1)\log 2}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \log 2$$

第6問

(1)

$$\begin{aligned}
 (1+\alpha)\beta+1+\bar{\alpha} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \beta &= -\frac{1+\bar{\alpha}}{1+\alpha} \\
 &= -\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \\
 &= -\frac{1}{4}(\sqrt{3}i-1)^2 \\
 &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2)

条件より

$$\begin{aligned}
 1+\alpha &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\bar{\alpha} \\
 1+\bar{\alpha} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\alpha
 \end{aligned}$$

となるから

$$w = -\bar{\alpha}z - \alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、2直線 OW , OZ が垂直であることから、 r を 0 でない実数としたとき、

$$\begin{aligned}
 w &= z \cdot ri \\
 \Leftrightarrow \frac{w}{z} &= ri \quad (\because z \neq 0)
 \end{aligned}$$

と表せる。よって、 $\frac{w}{z}$ は実部が 0 であるから、

$$\begin{aligned}
 \frac{w}{z} + \frac{\bar{w}}{\bar{z}} &= 0 \\
 \Leftrightarrow w\bar{z} + \bar{w}z &= 0
 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここに①を代入すると、

$$\begin{aligned}
 (-\bar{\alpha}z - \alpha)\bar{z} + (-\alpha\bar{z} - \bar{\alpha})z &= 0 \\
 \Leftrightarrow -(\alpha + \bar{\alpha})z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z &= 0
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha + \bar{\alpha} = -1$ であるから、

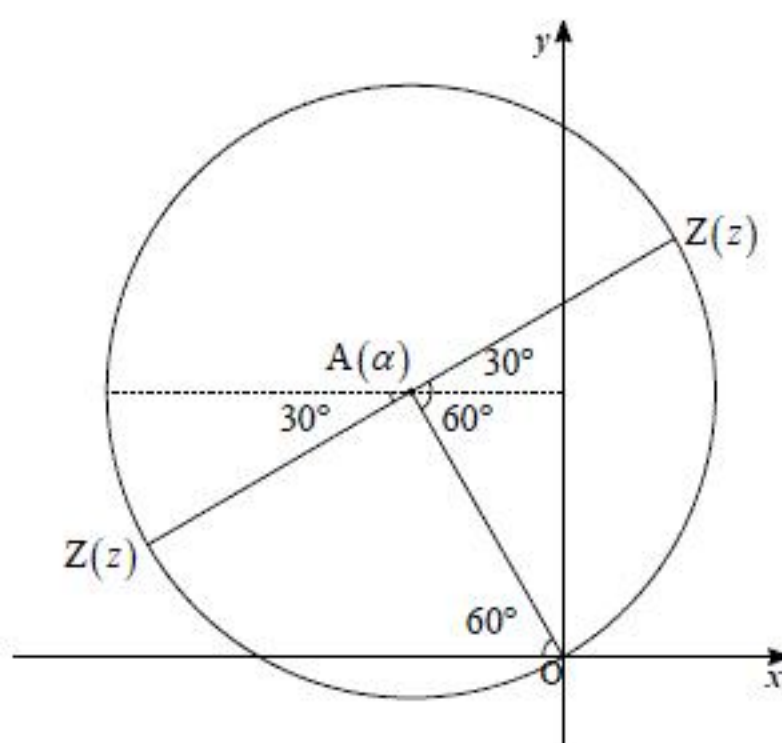
$$\begin{aligned}
 z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z &= 0 \\
 \Leftrightarrow (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) &= \alpha\bar{\alpha} \\
 \Leftrightarrow |z - \alpha|^2 &= |\alpha|^2 = 1 \\
 \therefore |z - \alpha| &= 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |z - \alpha| = 1$$

(3)

(2)の結果より、 Z は A を中心とする半径 1 の円の上にある。



上図より、求める z の値は

$$z = \alpha \pm \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2}i$$

となる。

$$(\text{答}) \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2}i$$