

第1問

(1)

$PB-PA=2$ であるから、 P は二点 A, B を焦点とし、頂点間の距離が2である双曲線のうち、 $y>0$ の部分を動く。よって求める方程式は

$$x^2-y^2=-1 \ (y>0)$$

となるが、このとき

$$y^2=x^2+1\geq 1$$

$$\therefore y\geq 1$$

より、 P の y 座標が取りうる範囲は $y\geq 1$ である。

(答) 軌跡 C の方程式 $x^2-y^2=-1 \ (y\geq 1)$

P の y 座標が取りうる範囲： $y\geq 1$

(2)

(1)より、 $y>0$ に注意すると C の方程式は

$$y=\sqrt{x^2+1}$$

となるので、 $x^2-y^2=-1$ の両辺を x で微分すると

$$2x-2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる。

(答) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(3)

$a=4$ のとき

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x^2+(y-4)^2=9 \end{cases}$$

から x を消去すると

$$y^2-1+(y-4)^2=9$$

$$\Leftrightarrow y^2-4y+3=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y-3)=0$$

$$\therefore y=1, 3$$

となる。よって二曲線の共有点の座標は

$$(x, y)=(0, 1), (\pm 2\sqrt{2}, 3)$$

となり、共有点の個数は3個である。

(答) 3個

(4)

まず二曲線が接する a の値について考える。

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x^2+(y-a)^2=9 \end{cases}$$

から x を消去すると

$$y^2-1+(y-a)^2=9$$

$$\Leftrightarrow 2y^2-2ay+a^2-10=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}-10=0$$

となる。よって二曲線が接するとき、接点の y 座標は $\frac{a}{2}$ となるが、 C は $y>0$ の領域に存在するので

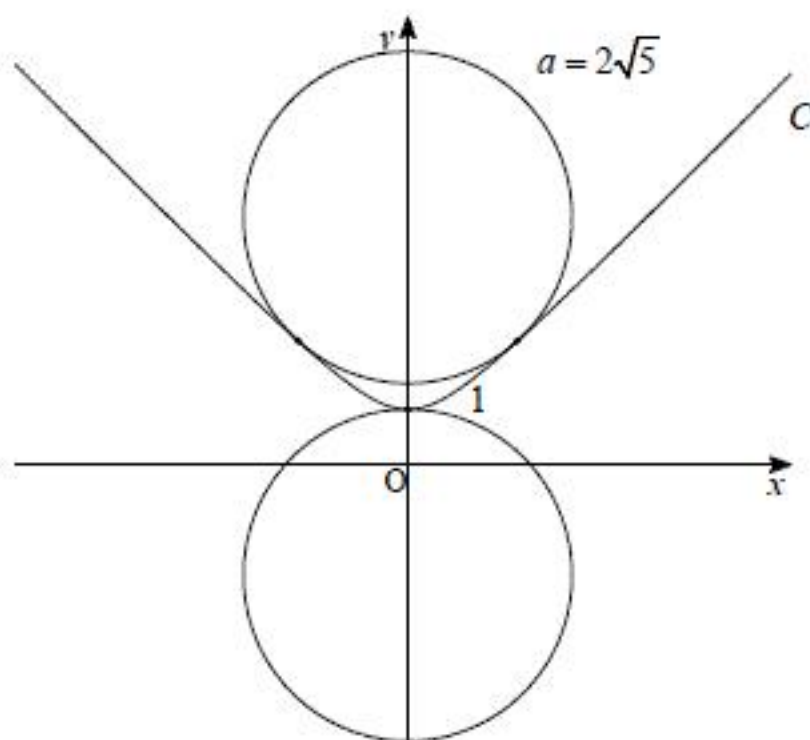
$$\frac{a}{2}>0\Leftrightarrow a>0$$

となる。また、接する条件は

$$\frac{a^2}{2}-10=0$$

$$\therefore a=2\sqrt{5} \ (\because a>0)$$

となる。このとき、接点の座標は



さらに、上図のように二曲線が一点で接するとき、円の半径が3であることから

$$a=1-3=-2$$

となる。以上の結果と(3)の結果を合わせると、 a の値による共有点の個数は

$$\begin{cases} a<-2, a>2\sqrt{5} & \text{のとき} 0 \text{ 個} \\ a=-2 & \text{のとき} 1 \text{ 個} \\ -2<a<4, a=2\sqrt{5} & \text{のとき} 2 \text{ 個} \\ a=4 & \text{のとき} 3 \text{ 個} \\ 4<a<2\sqrt{5} & \text{のとき} 4 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

(答)前述

第2問

(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x} &= \frac{\sin x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-(\cos x)'}{1 - \cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \right) (\cos x)'\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx &= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \right) (\cos x)' dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\log \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= 2 \log(1 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

となる。

(答) $2 \log(1 + \sqrt{2})$

(2)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx$$

となる。ここで右辺第二項について $x = \pi - t$ と置換すれば

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{2} - t}{\sin(\pi - t)} (-dt) \\ &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\sin t} dt \\ &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(3)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx$$

となるから、(1), (2)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x}{\sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} \cdot 2 \log(1 + \sqrt{2}) \\ &= \pi \log(1 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi \log(1 + \sqrt{2})$

(4)

部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^1 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \log x dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ (x)' \log x + \log x (\log x)' \right\} dx \\ &= \left[x \log x + \frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \\ &= \frac{1}{e} - \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{e} \right) \\ &= \frac{2}{e} - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{e} - \frac{3}{2}$

(5)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt$ は定数であるから、これを k とおくと、与式より

$$f(x) = \sin^2 x + 2k$$

となる。ここで定義より

$$\begin{aligned}k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + 2k) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin^2 t (\cos t)' + 2k \cos t \right\} dt \\ &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 t + 2k \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3} + 2k \\ \therefore k &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって

$$f(x) = \sin^2 x - \frac{2}{3}$$

となる。

(答) $f(x) = \sin^2 x - \frac{2}{3}$