

〔 1 〕

(1)

$f'(x)$ の符号が変化しないような k の範囲を求めればよい。

$$f'(x) = 3x^2 - 4kx + k + 3 = 3\left(x - \frac{2}{3}k\right)^2 - \frac{4}{3}k^2 + k + 3$$

となるから、求める範囲は

$$-\frac{4}{3}k^2 + k + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 - 3k - 9 \leq 0$$

$$\therefore \frac{3-3\sqrt{17}}{8} \leq k \leq \frac{3+3\sqrt{17}}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3-3\sqrt{17}}{8} \leq k \leq \frac{3+3\sqrt{17}}{8}$$

(2)

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ において } \cos x > 0$$

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ において } \cos 3x > 0$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \text{ において } \cos 3x < 0$$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 3x \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x dx$$

となる。ここで積和の公式より

$$\cos 3x \cos x = \frac{\cos(3x+x) + \cos(3x-x)}{2} = \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2}$$

となるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 3x \cos x| dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 4x + \cos 2x) dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

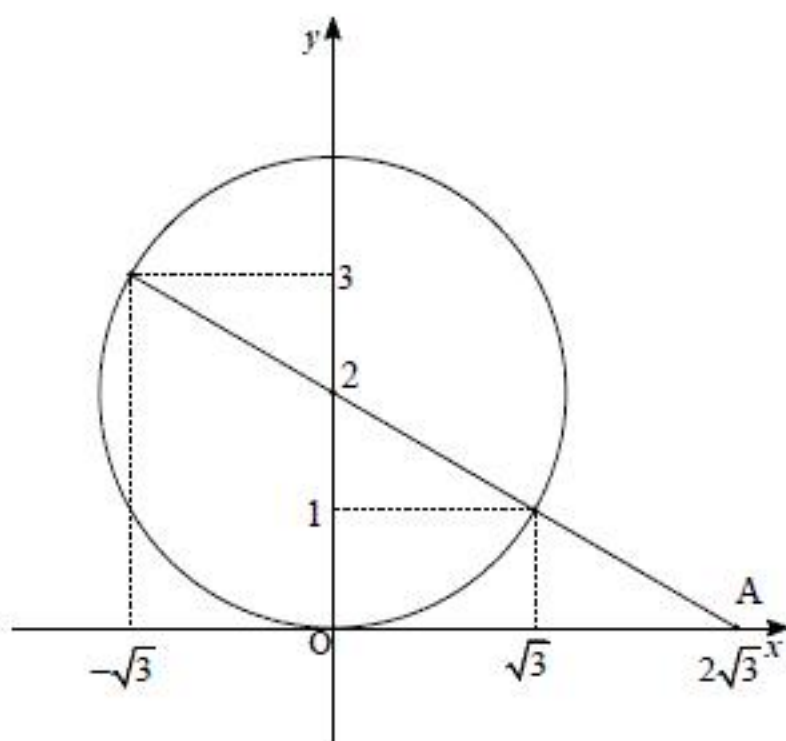
となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(3)

点 $P(z)$ は複素平面上で中心 $(0, 2)$ 、半径 2 の円周上を動く。また、 $|z - 2\sqrt{3}|$ は点 P と点

$A(2\sqrt{3})$ の距離を表す。



よって上図より、 $|z - 2\sqrt{3}|$ は $z = \sqrt{3} + i$ のときに最小値

$$|\sqrt{3} + i - 2\sqrt{3}| = |i - \sqrt{3}| = 2$$

をとり、 $z = -\sqrt{3} + 3i$ のときに最大値

$$|-\sqrt{3} + 3i - 2\sqrt{3}| = 3|i - \sqrt{3}| = 6$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad z = \sqrt{3} + i \text{ のとき最小値 } 2, \quad z = -\sqrt{3} + 3i \text{ のとき最大値 } 6$$

[2]

(1)

与式に $x=0$ を代入すると

$$1 \cdot f(0) + 0 = 1 + 1 \cdot (3 \cdot 0 - 1)$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(0) = 0$$

(2)

与式の両辺を x で微分すると

$$-e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) + e^{-x}f(x) = -2e^{-2x}(3\sin x - \cos x) + e^{-2x}(3\cos x + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x) = 5e^{-2x}(\cos x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 5e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = 5e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

(3)

$$(e^{-x} \sin x)' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

となるから, (2)より

$$f'(x) = 5(e^{-x} \sin x)'$$

$$\therefore f(x) = 5e^{-x} \sin x + C$$

となる。ただし, C は積分定数である。また, (1)より $f(0)=0$ から $C=0$ であるので

$$f(x) = 5e^{-x} \sin x$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (e^{-x} \sin x)' = e^{-x}(\cos x - \sin x), \quad f(x) = 5e^{-x} \sin x$$

[3]

(1)

$\theta = \angle BAD$ とおく。四角形は円に内接しているから

$$\angle BCD = \pi - \theta$$

となるので

$$\begin{aligned}\cos \angle BAD + \cos \angle BCD &= \cos \theta + \cos (\pi - \theta) \\ &= \cos \theta - \cos \theta \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$\triangle ABD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned}BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \theta \\ &= 36 + (5-x)^2 - 2 \cdot 6 \cdot (5-x) \cos \theta \\ &= x^2 - 10x + 61 - 12(5-x) \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となり、 $\triangle ACD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned}BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD(-\cos \theta) \\ &= 9 + x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x \cos \theta \\ &= x^2 + 6x \cos \theta + 9 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。よって①、②より BD を消去すると

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 61 - 12(5-x) \cos \theta &= x^2 + 6x \cos \theta + 9 \\ \Leftrightarrow \{12(5-x) + 6x\} \cos \theta &= 52 - 10x \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{52 - 10x}{60 - 6x} = \frac{26 - 5x}{3(10 - x)}\end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)の結果と $\sin \theta > 0$ より

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left\{ \frac{26 - 5x}{3(10 - x)} \right\}^2} \\ &= \frac{4\sqrt{-x^2 + 5x + 14}}{3(10 - x)} \quad (\because 0 < x < 5)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \sin \angle BAD + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \sin \angle BAD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (5-x) \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \sin (\pi - \theta) \\ &= 3(5-x) \sin \theta + \frac{3}{2} x \sin \theta \\ &= \frac{3}{2} (10-x) \sin \theta \\ &= 2\sqrt{-x^2 + 5x + 14}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(x) = 2\sqrt{-x^2 + 5x + 14}$$

(4)

(3)の結果より

$$S(x) = 2\sqrt{-x^2 + 5x + 14} = 2\sqrt{-\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}}$$

となるから、 $S(x)$ は $x = \frac{5}{2}$ のときに最大値

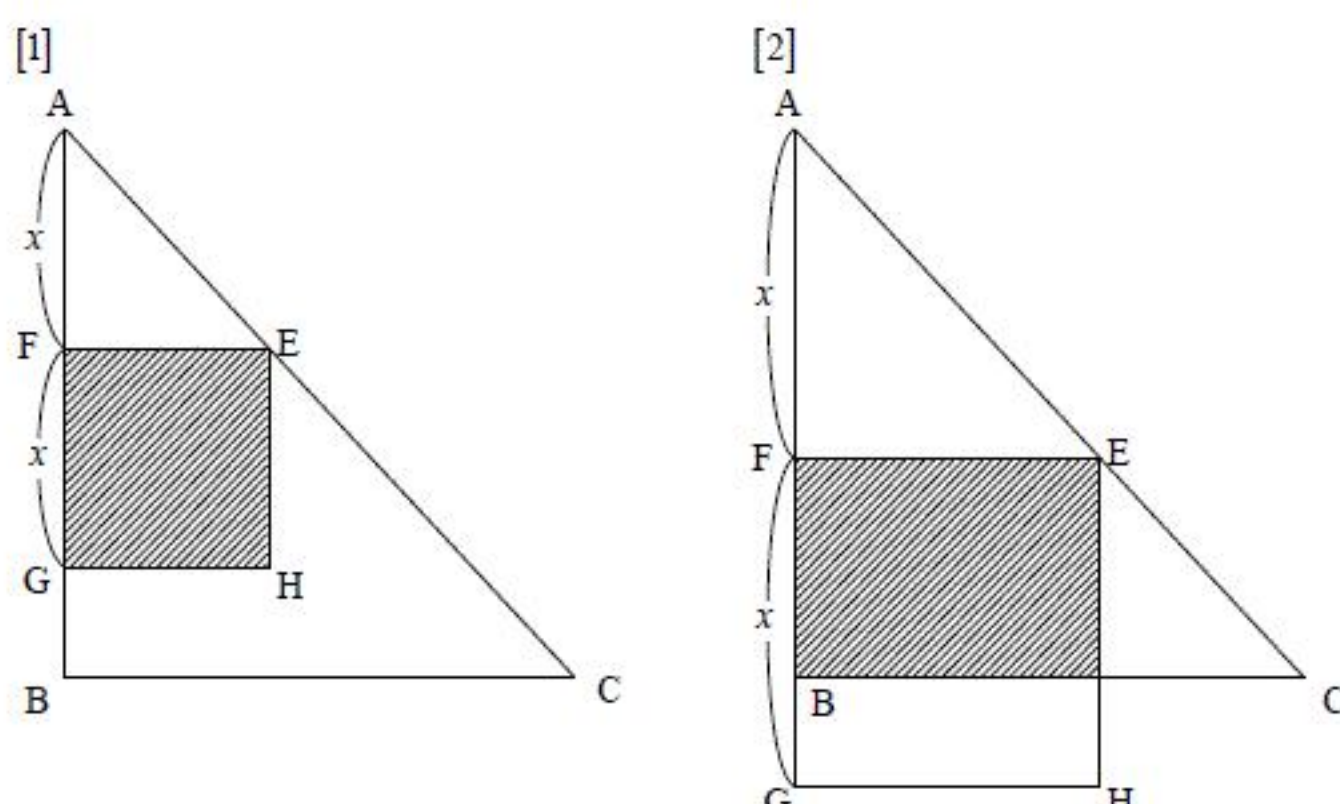
$$2\sqrt{\frac{81}{4}} = 9$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} : 9 \left(x = \frac{5}{2} \right)$$

〔4〕

(1)



各点の位置関係は上図のようになる。斜線部の面積が $S(x)$ である。

[1]のとき

斜線部の領域が[1]のように正方形になるのは

$$0 < AG \leq AB$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

のときである。このとき

$$S(x) = x^2$$

となる。

[2]のとき

斜線部の領域が[2]のようになるときは、 $x \leq 2$ に気をつけると

$$AG > AB$$

$$\Leftrightarrow 1 < x \leq 2$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} S(x) &= FB \times BH \\ &= (2-x) \times x \\ &= -x^2 + 2x \end{aligned}$$

となる。

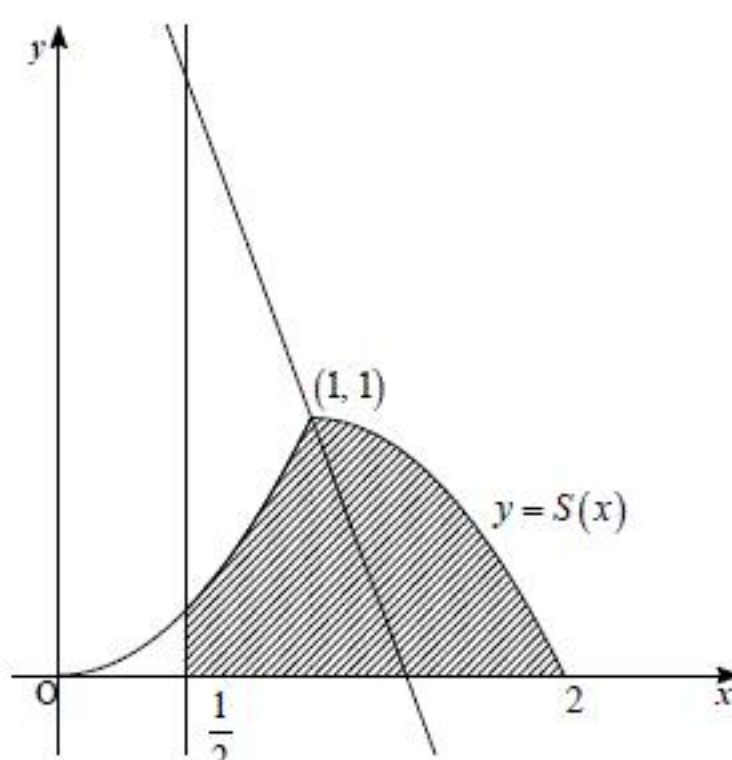
以上[1], [2]より

$$S(x) = \begin{cases} x^2 & (0 < x \leq 1 \text{ のとき}) \\ -x^2 + 2x & (1 < x \leq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) S(x) = \begin{cases} x^2 & (0 < x \leq 1 \text{ のとき}) \\ -x^2 + 2x & (1 < x \leq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)(i)



D は上図斜線部の領域である。よって D の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[-\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{7}{24} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{23}{24} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{23}{24}$$

(2)(ii)

点 $(1, 1)$ を通る直線 $x=1$ で D を分割すると、(i)より左側の面積は $\frac{7}{24}$ であり、右側の面積は $\frac{2}{3}$

である。また、

$$\frac{7}{24} < \frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

となるから、右側の面積のほうが大きい。よって(i)の図より直線 l の傾きは負である。直線 l の傾きを $m (< 0)$ とおくと、直線 l の方程式は

$$y = m(x-1) + 1 = mx - m + 1$$

となる。よって直線 l によって分割された領域 D の右側の面積は

$$\int_1^2 (-x^2 + 2x) dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{m} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2m}$$

となるから、これが D の面積の半分となるとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{24} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2m} \\ \Leftrightarrow m &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

となるから、直線 l の方程式は

$$y = -\frac{8}{3}x + \frac{11}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) y = -\frac{8}{3}x + \frac{11}{3}$$