

第1問

(1)

大中小3個のさいころを同時に投げる方法の総数は 6^3 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。出る目の最小値が2となる場合の数は、出る目が全て2以上となる場合の数から出る目が全て3以上となる場合の数を引いたものに等しい。よって、これは

$$5^3 - 4^3 = 61$$

より、61通りある。したがって、求める確率は

$$\frac{61}{6^3} = \frac{61}{216}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{61}{216}$$

(2)

大中小3個のさいころの目が順に a, b, c となるとき、これを (a, b, c) と表すことにする。

$S=4$ となるのは、 $(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$ の3通りあり、 $S=17$ となるのは、

$(5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 5)$ の3通りある。よって、条件を満たすものは以上の6通りであるから、求める確率は

$$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{36}$$

(3)

$5 \leq S \leq 16$ となる場合の数は、全事象の場合の数から $S=3, 4, 17, 18$ となる場合の数を引いたものに等しい。 $S=3$ となるのは $(1, 1, 1)$ の1通りであり、 $S=18$ となるのは、 $(6, 6, 6)$ の1通りである。これと(2)より、 $5 \leq S \leq 16$ となる場合の数は、

$$6^3 - (1 + 3 + 3 + 1) = 6^3 - 8$$

となるから、求める確率は

$$\frac{6^3 - 8}{6^3} = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{26}{27}$$

(4)

線分ABを底辺とすると、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$T = \frac{1}{2}(a+b)c^2$$

となる。これが $T \leq 9$ を満たす (a, b, c) の場合の数を求める。

[1] $c=1$ のとき

$$T = \frac{1}{2}(a+b) \cdot 1^2 = \frac{a+b}{2} \text{ となるから,}$$

$$T \leq 9 \Leftrightarrow a+b \leq 18$$

となればよい。これは任意の (a, b) の組で成立するから、

$$6 \cdot 6 = 36$$

より、36通りである。

[2] $c=2$ のとき

$$T = \frac{1}{2}(a+b) \cdot 2^2 = 2(a+b) \text{ となるから,}$$

$$T \leq 9 \Leftrightarrow a+b \leq \frac{9}{2}$$

となればよい。これが成り立つのは、

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

のときだから、6通りである。

[3] $c=3$ のとき

$$T = \frac{1}{2}(a+b) \cdot 3^2 = \frac{9}{2}(a+b) \text{ となるから,}$$

$$T \leq 9 \Leftrightarrow a+b \leq 2$$

となればよい。これが成り立つのは、

$$(a, b) = (1, 1)$$

のときだから、1通りである。

[4] $c \geq 4$ のとき

$$T \geq \frac{1}{2}(a+b) \cdot 4^2 = 8(a+b) \text{ となるから,}$$

$$T \leq 9 \Rightarrow a+b \leq \frac{9}{8}$$

が必要である。これを満たす (a, b) の組は存在しない。よって、0通りである。

以上[1], [2], [3], [4]より、条件を満たすのは、

$$36 + 6 + 1 + 0 = 43$$

より、43通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{43}{6^3} = \frac{43}{216}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{43}{216}$$

第2問

(1)

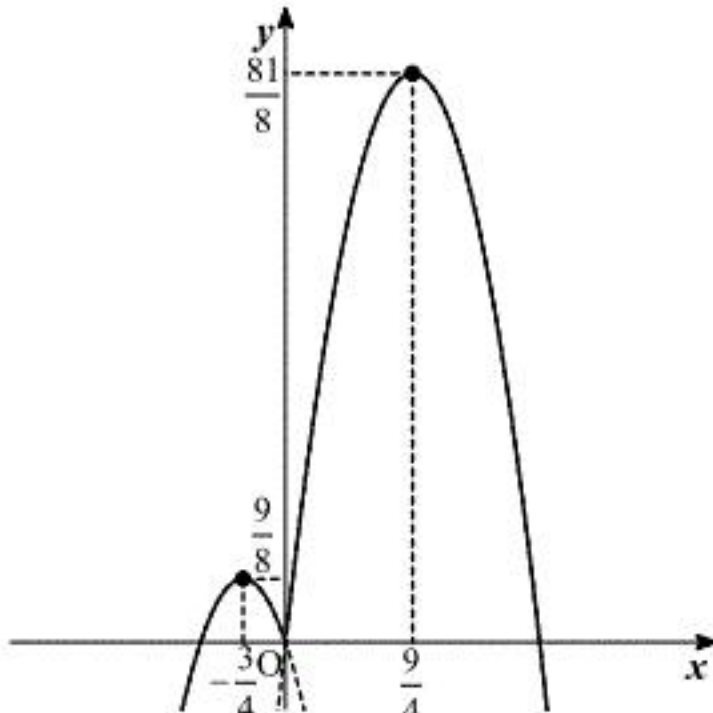
$x \geq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 3x + 6x \\ &= -2x^2 + 9x \\ &= -2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{81}{8} \end{aligned}$$

となり、 $x < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 3x - 6x \\ &= -2x^2 - 3x \\ &= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。よって、 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{9}{4}$ のとき最大値 $\frac{81}{8}$ をとる。

(答) $\frac{81}{8}$

(2)

$x > 0$ のとき $f(x) = -2x^2 + 9x$ となるから、これを微分すると、

$$f'(x) = -4x + 9$$

となる。よって、接線 L の方程式は、

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\ \Leftrightarrow y - (-2t^2 + 9t) &= (-4t + 9)(x - t) \\ \therefore y &= (-4t + 9)x + 2t^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = (-4t + 9)x + 2t^2$

(3)

(1), (2) より、 $y = -2x^2 - 3x$ と $y = (-4t + 9)x + 2t^2$ が $x < 0$ で接することを考えればよい。このとき、 x についての二次方程式

$$\begin{aligned} -2x^2 - 3x &= (-4t + 9)x + 2t^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2(-t + 3)x + t^2 &= 0 \end{aligned}$$

の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-t + 3)^2 - 1 \cdot t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -6t + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

が必要である。このとき、点 A の x 座標は $\frac{3}{2}$ であり、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \frac{3}{2} \\ &= 9 \end{aligned}$$

より、点 A の座標は $\left(\frac{3}{2}, 9\right)$ となる。また、 $t = \frac{3}{2}$ を $x^2 + 2(-t + 3)x + t^2 = 0$ に代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(-\frac{3}{2} + 3\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

となるから、点 B の x 座標は $-\frac{3}{2}$ であり、

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= -2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、点 B の座標は $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ となる。したがって、確かに点 A の x 座標は $x > 0$ となり、点 B

の x 座標は $x < 0$ となるから、これは条件を満たす。また $t = \frac{3}{2}$ を (2) の結果に代入して、接線 L の方程式

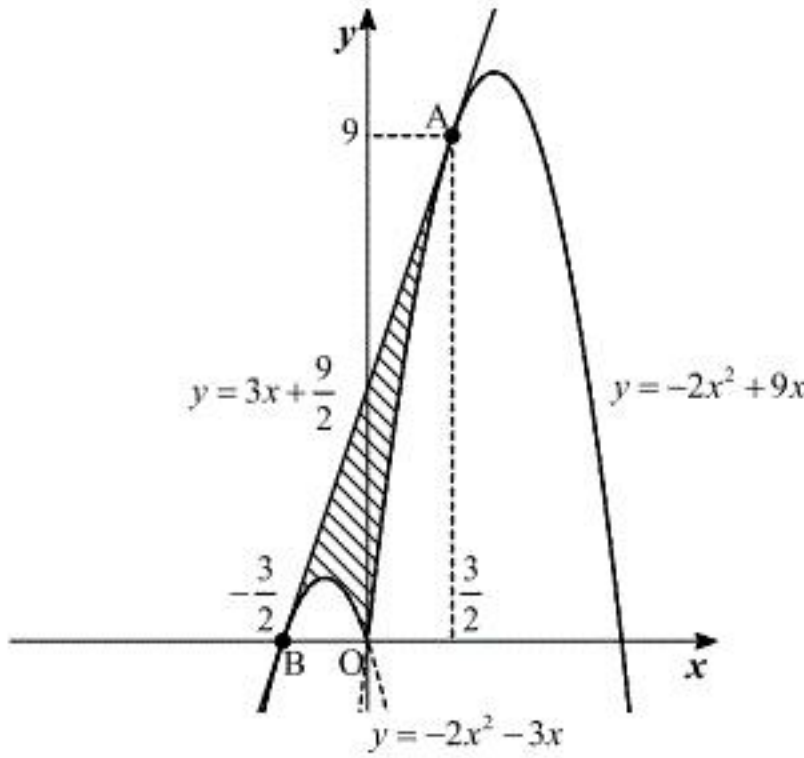
$$\begin{aligned} y &= \left(-4 \cdot \frac{3}{2} + 9\right)x + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \therefore y &= 3x + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) 点 A の座標: $\left(\frac{3}{2}, 9\right)$ 、点 B の座標: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 、接線 L の方程式: $y = 3x + \frac{9}{2}$

(4)

(3) の結果より、下図の斜線部分の面積を求めればよい。



よって、

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{3}{2}}^0 \left\{ \left(3x + \frac{9}{2}\right) - (-2x^2 - 3x) \right\} dx + \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(3x + \frac{9}{2}\right) - (-2x^2 + 9x) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^0 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 dx + \int_0^{\frac{3}{2}} 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3} \left(x + \frac{3}{2}\right)^3 \right]_{-\frac{3}{2}}^0 + \left[\frac{2}{3} \left(x - \frac{3}{2}\right)^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^3 \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot 0^3 - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{9}{2}$

第3問

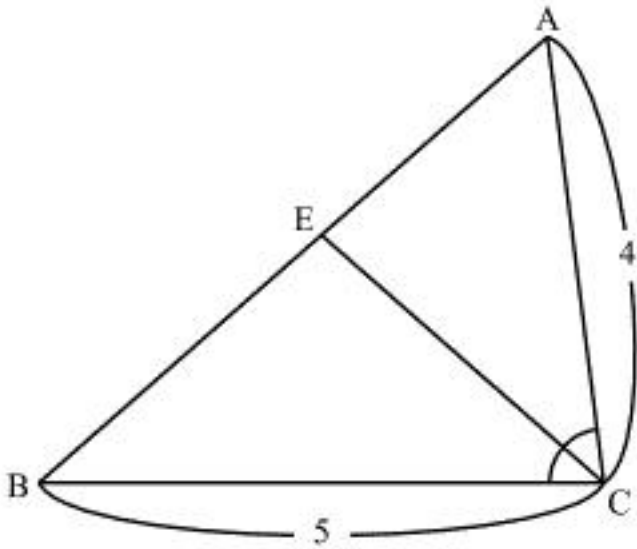
(1)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2} \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{2}$

(2)



角の2等分線の性質より、
 $AE:EB=CA:CB=4:5$

となるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \frac{5}{9}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{9}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。また、

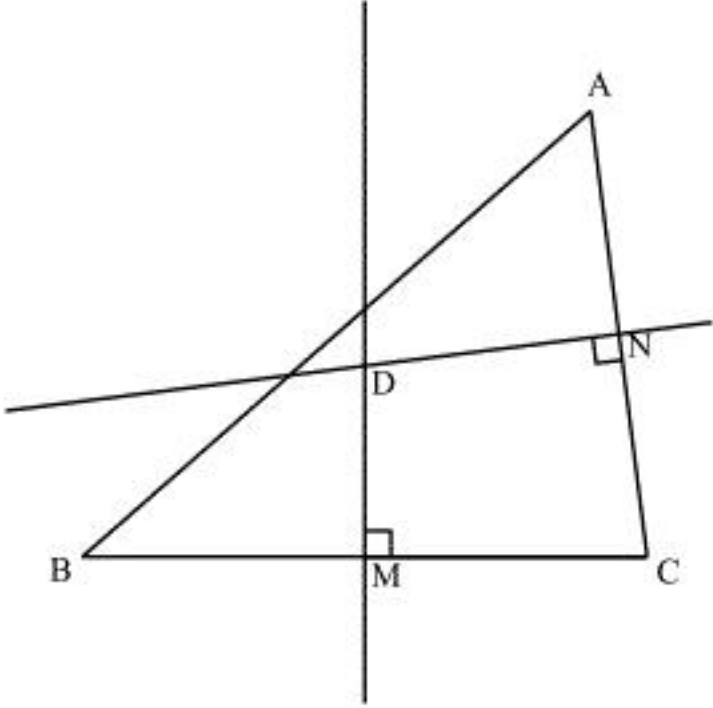
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CE}| &= \left| \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \right| \\ &= \frac{\sqrt{5\vec{a} + 4\vec{b}}^2}{9} \\ &= \frac{\sqrt{25|\vec{a}|^2 + 40\vec{a} \cdot \vec{b} + 16|\vec{b}|^2}}{9} \\ &= \frac{\sqrt{25 \cdot 4^2 + 40 \cdot \frac{5}{2} + 16 \cdot 5^2}}{9} \quad (\because (1)) \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{CE} = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$, $|\overrightarrow{CE}| = \frac{10}{3}$

(3)

辺BCの垂直二等分線と辺BCの交点を点M、辺ACの垂直二等分線と辺ACの交点を点N
とすると、 $\angle DMC = \angle DNC = 90^\circ$, $BM = CM$, $AN = CN$ は明らかである。



よって、実数 p, q を用いて $\overrightarrow{CD} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とすると、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \left\{ p\vec{a} + \left(q - \frac{1}{2} \right) \vec{b} \right\} \cdot \vec{b} = 0 \\ \left\{ \left(p - \frac{1}{2} \right) \vec{a} + q\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} p\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(q - \frac{1}{2} \right) |\vec{b}|^2 = 0 \\ \left(p - \frac{1}{2} \right) |\vec{a}|^2 + q\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{5}{2}p + 25\left(q - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ 16\left(p - \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{2}q = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} p = \frac{3}{7} \\ q = \frac{16}{35} \end{cases} \end{aligned}$$

となるから、 $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{16}{35}\vec{b}$ となる。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} &= \left(\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{16}{35}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \right) \\ &= \frac{(15\vec{a} + 16\vec{b}) \cdot (5\vec{a} + 4\vec{b})}{35 \cdot 9} \\ &= \frac{75|\vec{a}|^2 + 140\vec{a} \cdot \vec{b} + 64|\vec{b}|^2}{35 \cdot 9} \\ &= \frac{75 \cdot 4^2 + 140 \cdot \frac{5}{2} + 64 \cdot 5^2}{35 \cdot 9} \\ &= 10 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{16}{35}\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = 10$

(4)

点Pは線分CE上の点だから、実数 k を用いて $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CE}$ と表せる。また、 $\overrightarrow{CD}$ の $\overrightarrow{CE}$ に対する正射影ベクトルは $\overrightarrow{CP}$ であるから、 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$ である。よって、辺々 $\overrightarrow{CE}$ との内積をとって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CE} &= k\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CE} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} &= k|\overrightarrow{CE}|^2 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|^2} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{10}{\left(\frac{10}{3} \right)^2} \quad (\because (2), (3)) \\ \therefore k &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \frac{9}{10}\overrightarrow{CE} \\ &= \frac{9}{10} \left(\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

第4問

(1)

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^n 2^{1-k} \\&= \sum_{k=1}^n 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\&= 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\&= 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m a_n &= \sum_{n=1}^m \left\{ 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\&= 2m - 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m}{1 - \frac{1}{2}} \\&= 2m - 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 2m - 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

(2)

$$b_1 = S_1 = -1^3 + 6 \cdot 1^2 + 25 \cdot 1 = 30$$

であり, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}b_n &= S_n - S_{n-1} \\&= \left(-n^3 + 6n^2 + 25n\right) - \left\{-\left(n-1\right)^3 + 6\left(n-1\right)^2 + 25\left(n-1\right)\right\} \\&= -3n^2 + 15n + 18 \\&= -3(n+1)(n-6)\end{aligned}$$

となるから, $b_n > 0$ となるのは, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ のときである。よって, 求める値は,

$$\begin{aligned}b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= S_5 \\&= -5^3 + 6 \cdot 5^2 + 25 \cdot 5 \\&= 150\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 150$$

(3)

(i)

$$d_n = \frac{1}{4^n} \left(c_n + \frac{1}{3} \right) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}d_{n+1} &= \frac{1}{4^{n+1}} \left(c_{n+1} + \frac{1}{3} \right) \\&= \frac{1}{4^{n+1}} \left(3c_n + \frac{4^n + 2}{3} + \frac{1}{3} \right) \\&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4^n} c_n + \frac{1}{12} + \frac{1}{4^{n+1}} \\&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4^n} \left(c_n + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \\&= \frac{3}{4} d_n + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

となる。これと

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{1}{4^1} \left(c_1 + \frac{1}{3} \right) \\&= \frac{1}{4} \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \right) \\&= \frac{7}{12}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}d_{n+1} &= \frac{3}{4} d_n + \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow d_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{3}{4} \left(d_n - \frac{1}{3} \right) \\ \Leftrightarrow d_n - \frac{1}{3} &= \left(d_1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \\ \therefore d_n &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \text{関係式: } d_{n+1} = \frac{3}{4} d_n + \frac{1}{12}, \text{ 一般項: } d_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

(ii)

$$\begin{aligned}d_n &= \frac{1}{4^n} \left(c_n + \frac{1}{3} \right) \\ \Leftrightarrow c_n &= 4^n d_n - \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow c_n &= 4^n \cdot \left\{ \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \right\} - \frac{1}{3} \\ \therefore c_n &= 3^{n-1} + \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad c_n = 3^{n-1} + \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}$$

第5問

(1)

$g(x)=\sqrt{x^2+1}$ とする。これを微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

となるから、直線 L の方程式は

$$\begin{aligned} y-g(p) &= g'(p)(x-p) \\ \Leftrightarrow y-\sqrt{p^2+1} &= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(x-p) \\ \therefore y &= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}x + \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \end{aligned}$$

となる。これが点 $A(a, 0)$ を通るから、

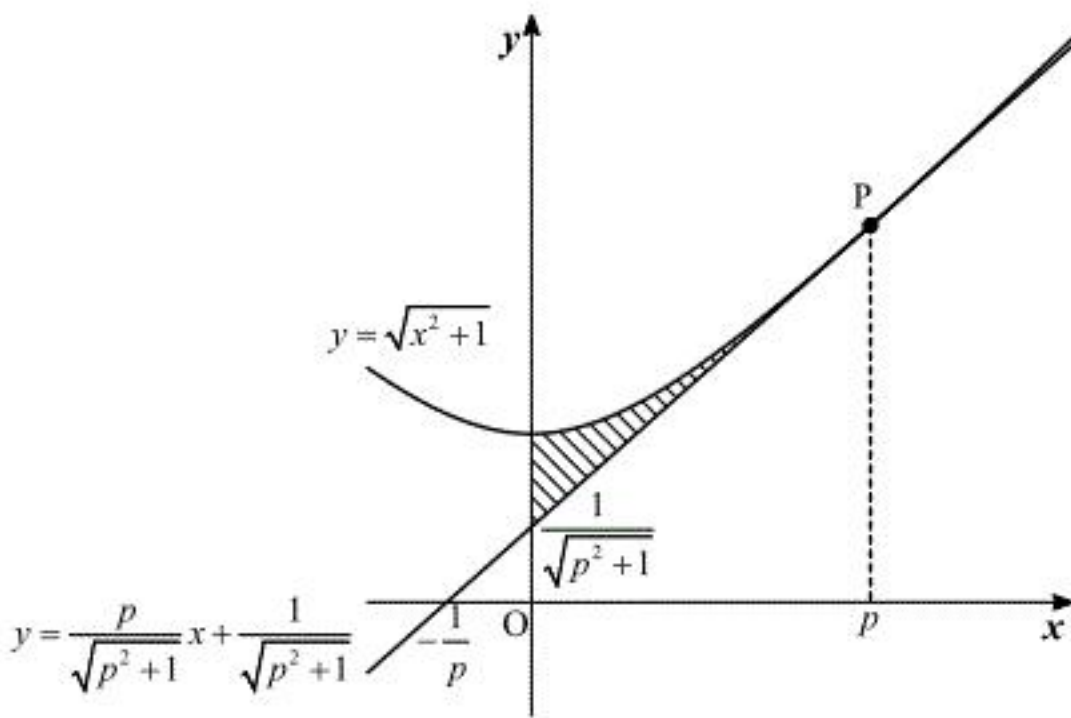
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}a + \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \\ \Leftrightarrow ap+1 &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{1}{p} \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) 直線 L の方程式: $y = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}x + \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, 点 A の x 座標: $a = -\frac{1}{p}$

(2)

直線 L の y 切片 $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ が正であることに注意すると、 x 軸のまわりに1回転させる図形は下図の斜線部分となる。



よって、求める体積は、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^p \left\{ \left(\sqrt{x^2+1} \right)^2 - \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}x + \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^p \left\{ x^2 + 1 - \frac{(px+1)^2}{p^2+1} \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} + x - \frac{(px+1)^3}{3p(p^2+1)} \right]_0^p \\ &= \pi \left[\left\{ \frac{p^3}{3} + p - \frac{(p^2+1)^3}{3p(p^2+1)} \right\} - \left\{ 0 + 0 - \frac{1}{3p(p^2+1)} \right\} \right] \\ &= \frac{\pi p^3}{3(p^2+1)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi p^3}{3(p^2+1)}$

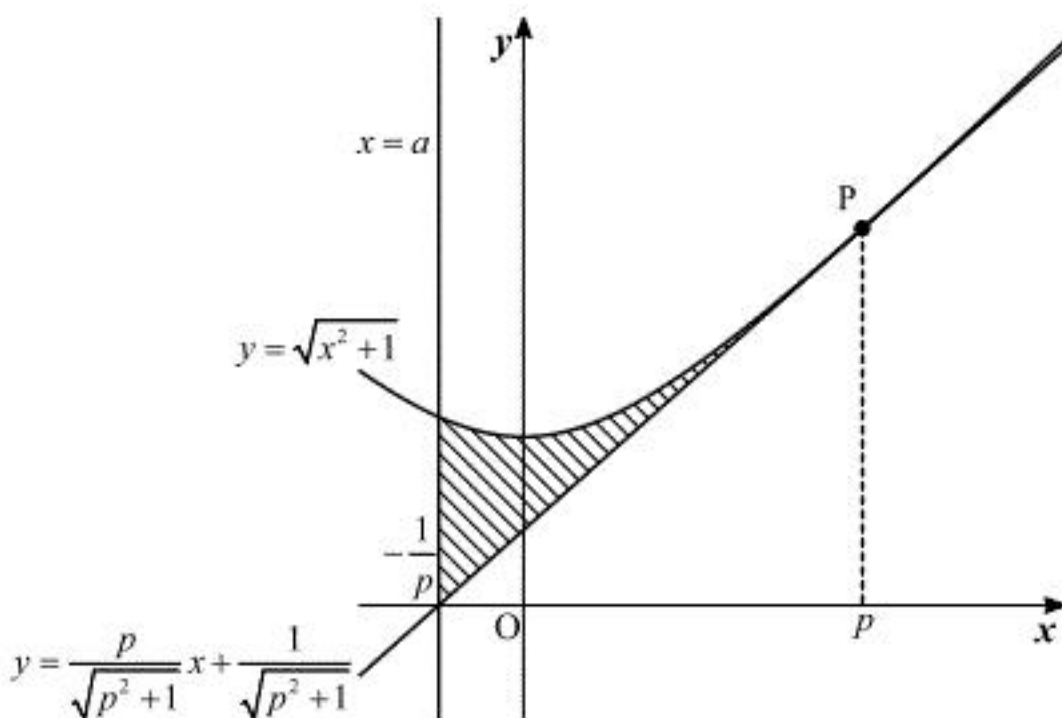
(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1} \\ &= 2\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $f'(x) = 2\sqrt{x^2+1}$

(4)



上図の斜線部分の面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{p}}^p \left\{ \left(\sqrt{x^2+1} \right) - \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}x + \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{p}}^p \left\{ \frac{1}{2} f'(x) - \frac{px+1}{\sqrt{p^2+1}} \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} f(x) - \frac{(px+1)^2}{2p\sqrt{p^2+1}} \right]_{-\frac{1}{p}}^p \\ &= \left(\frac{p\sqrt{p^2+1} + \log(p + \sqrt{p^2+1})}{2} - \frac{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2p} \right) - \left(\frac{-\frac{1}{p}\sqrt{\frac{1}{p^2+1}} + \log\left(-\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2+1}}\right)}{2} - 0 \right) \\ &= -\frac{\sqrt{p^2+1}}{2p} + \frac{\sqrt{p^2+1}}{2p^2} + \frac{\log(p + \sqrt{p^2+1}) - \log\left(-\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2+1}}\right)}{2} \\ &= \frac{(-p+1)\sqrt{p^2+1}}{2p^2} + \frac{1}{2} \log \frac{(p + \sqrt{p^2+1})(1 + \sqrt{p^2+1})}{p} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{1}{2} \log \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \quad (\because p=2) \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{1}{2} \log \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

第6問

(1)

ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}(z-i)^4 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \Leftrightarrow (z-i)^4 &= \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \\ \Leftrightarrow z-i &= \cos \frac{\frac{2}{3}+2k}{4}\pi + i \sin \frac{\frac{2}{3}+2k}{4}\pi \quad (k=0, 1, 2, 3) \\ \therefore z &= \cos \left(\frac{1}{6} + \frac{k}{2} \right) \pi + i \left\{ 1 + \sin \left(\frac{1}{6} + \frac{k}{2} \right) \pi \right\} \quad (k=0, 1, 2, 3)\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}k=0 \text{ のとき, } z &= \cos \frac{1}{6}\pi + i \left\{ 1 + \sin \frac{1}{6}\pi \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \\ k=1 \text{ のとき, } z &= \cos \frac{2}{3}\pi + i \left\{ 1 + \sin \frac{2}{3}\pi \right\} = -\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \\ k=2 \text{ のとき, } z &= \cos \frac{7}{6}\pi + i \left\{ 1 + \sin \frac{7}{6}\pi \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ k=3 \text{ のとき, } z &= \cos \frac{5}{3}\pi + i \left\{ 1 + \sin \frac{5}{3}\pi \right\} = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i\end{aligned}$$

となる。よって、これらの虚部の大きさを比較すると

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{3}{2} > \frac{1}{2} > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるから、

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_4 = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$$

となる。

$$(\text{答}) \quad z_1 = -\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_4 = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$$

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned}(3-\sqrt{3})\frac{z_1}{z_2} &= (3-\sqrt{3}) \frac{-\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i} \\ &= (3-\sqrt{3}) \frac{-1 + (2+\sqrt{3})i}{\sqrt{3}+3i} \\ &= \frac{(3-\sqrt{3})\{-1 + (2+\sqrt{3})i\}(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)} \\ &= \frac{(3-\sqrt{3})\{2\sqrt{3}+6 + (2\sqrt{3}+6)i\}}{12} \\ &= 1+i \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

となる。よって、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}\left\{ (3-\sqrt{3})\frac{z_1}{z_2} \right\}^{10} &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^{10} \\ &= 32 \left(\cos \frac{5}{2}\pi + i \sin \frac{5}{2}\pi \right) \\ &= 32i\end{aligned}$$

となる。

(答) $32i$

(3)

$\frac{|z_3-s|}{|z_2-s|}$ は正の実数だから、これが最大となるとき、 $\frac{|z_3-s|^2}{|z_2-s|^2}$ も最大となる。よって、 $f(s) = \frac{|z_3-s|^2}{|z_2-s|^2}$ として、これを最大にする s を考えればよい。 s は実数であるから、

$$\begin{aligned}f(s) &= \frac{\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - s \right|^2}{\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - s \right|^2} \\ &= \frac{\left(-s - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2}{\left(-s + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2} \\ &= \frac{s^2 + \sqrt{3}s + 1}{s^2 - \sqrt{3}s + 3} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3}s - 2}{s^2 - \sqrt{3}s + 3}\end{aligned}$$

となる。

[1] $2\sqrt{3}s - 2 \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}s^2 - \sqrt{3}s + 3 &= \left(-s + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 > 0 \text{ より,} \\ f(s) &= 1 + \frac{2\sqrt{3}s - 2}{s^2 - \sqrt{3}s + 3} \leq 1\end{aligned}$$

となる。

[2] $2\sqrt{3}s - 2 > 0$ のとき

$$\begin{aligned}f(s) &= 1 + \frac{2\sqrt{3}s - 2}{s^2 - \sqrt{3}s + 3} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3}\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{7}{3}} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3}}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \left(\because s - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \right)\end{aligned}$$

となるから、 $s - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ に注意すると、相加平均・相乗平均の関係より、

$$\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \geq 2 \sqrt{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

となる。ただし、等号成立は、

$$\begin{aligned}\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \\ \Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \frac{7}{3} \\ \Leftrightarrow s - \frac{1}{\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{7}{3}} \quad \left(\because s - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \right) \\ \therefore s &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{21}}{3}\end{aligned}$$

のときのみである。よって、

$$f(s) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \leq 1 + \frac{6}{2\sqrt{7} - 1}$$

となるから、 $s = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{21}}{3}$ のとき $f(s)$ は最大値 $1 + \frac{6}{2\sqrt{7} - 1}$ をとる。

以上[1],[2]より、 $s = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{21}}{3}$ のとき $f(s)$ は最大となる。

(答) $s = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{21}}{3}$