

第1問

問1

$y=2x+\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ に $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$ を代入すると、

$$x=1\text{のとき、}y=2\cdot 1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1\right)=\frac{5}{2}$$

$$x=2\text{のとき、}y=2\cdot 2+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 2\right)=\frac{7}{2}$$

$$x=3\text{のとき、}y=2\cdot 3+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)=5$$

$$x=4\text{のとき、}y=2\cdot 4+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 4\right)=\frac{15}{2}$$

$$x=5\text{のとき、}y=2\cdot 5+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 5\right)=\frac{21}{2}$$

$$x=6\text{のとき、}y=2\cdot 6+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 6\right)=13$$

となる。

$$(\text{答})\ x=1\text{のとき、}y=\frac{5}{2},\ x=2\text{のとき、}y=\frac{7}{2},\ x=3\text{のとき、}y=5$$

$$x=4\text{のとき、}y=\frac{15}{2},\ x=5\text{のとき、}y=\frac{21}{2},\ x=6\text{のとき、}y=13$$

問2

問1の結果より、 $x_2=2, y_2=\frac{7}{2}$ となるから、

$$b=e^{-\frac{1}{2}(ax_2-y_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow b=e^{-\frac{1}{2}\left(2a-\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$\therefore b=e^{-2\left(a-\frac{7}{4}\right)^2}$$

となる。よって、 $f(a)=e^{-2\left(a-\frac{7}{4}\right)^2}$ としてこれを微分すると、

$$f'(a)=-4\left(a-\frac{7}{4}\right)e^{-2\left(a-\frac{7}{4}\right)^2}$$

となるから、 $f'(a)=0\Leftrightarrow a=\frac{7}{4}$ である。これと、

$$f\left(\frac{7}{4}\right)=e^{-2\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{4}\right)^2}=1$$

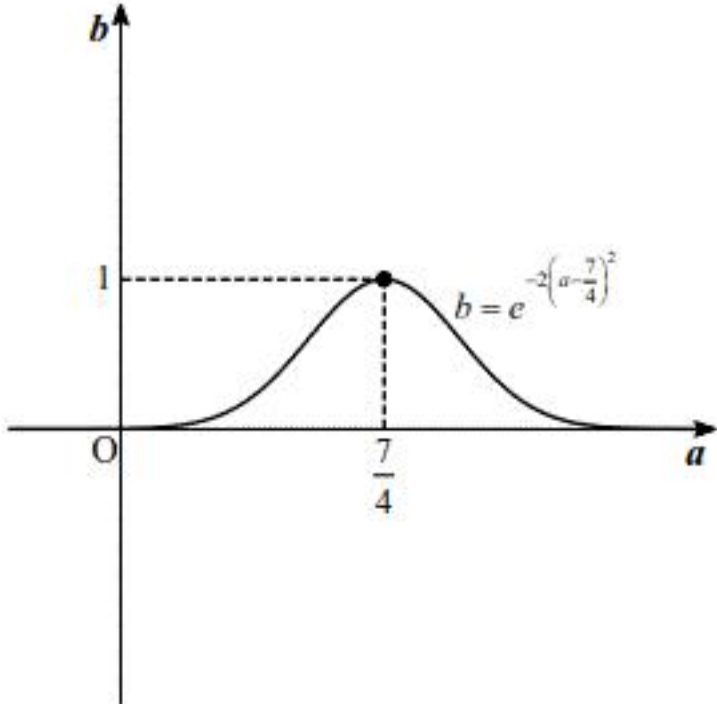
に注意して増減表を書くと次のようになる。

a	...	$\frac{7}{4}$	...
$f'(a)$	+	0	-
$f(a)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

これと、

$$\lim_{a\rightarrow-\infty}f(a)=\lim_{a\rightarrow\infty}e^{-2\left(a-\frac{7}{4}\right)^2}=0$$

より、求めるグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

問3

$$\begin{aligned} S &= e^{-\frac{1}{2}(ax_1-y_1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(ax_2-y_2)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(ax_3-y_3)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(ax_4-y_4)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(ax_5-y_5)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(ax_6-y_6)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(ax_1-y_1)^2-\frac{1}{2}(ax_2-y_2)^2-\frac{1}{2}(ax_3-y_3)^2-\frac{1}{2}(ax_4-y_4)^2-\frac{1}{2}(ax_5-y_5)^2-\frac{1}{2}(ax_6-y_6)^2} \end{aligned}$$

となるから、 $S=g(a)$ として、これを微分すると、

$$g'(a)=-\left\{x_1(ax_1-y_1)+x_2(ax_2-y_2)+x_3(ax_3-y_3)+x_4(ax_4-y_4)+x_5(ax_5-y_5)+x_6(ax_6-y_6)\right\}g(a)$$

となる。 $h(a)$ を

$$h(a)=-\left\{x_1(ax_1-y_1)+x_2(ax_2-y_2)+x_3(ax_3-y_3)+x_4(ax_4-y_4)+x_5(ax_5-y_5)+x_6(ax_6-y_6)\right\}$$

とすると、 $g'(a)=h(a)g(a)$ であり、 $g(a)>0$ は明らかだから、 $g'(a)$ と $h(a)$ の正負は一致する。 $h(a)$ の式に

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5, x_6=6$$

$$y_1=\frac{5}{2}, y_2=\frac{7}{2}, y_3=5, y_4=\frac{15}{2}, y_5=\frac{21}{2}, x_6=13$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} h(a) &= -\left\{\left(a-\frac{5}{2}\right)+(4a-7)+(9a-15)+(16a-30)+\left(25a-\frac{105}{2}\right)+(36a-78)\right\} \\ &= -91a+185 \\ &= -91\left(a-\frac{185}{91}\right) \end{aligned}$$

となる。よって増減表を書くと次のようになる。

a	...	$\frac{185}{91}$	...
$g'(a)$	+	0	-
$g(a)$	$\nearrow$	最大	$\searrow$

したがって、 $a=\frac{185}{91}$ のとき S は最大となる。

$$(\text{答})\ \frac{185}{91}$$

第2問

問 1

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\sin t}{1 - \cos t}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

問 2

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 - \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= \sin t\end{aligned}$$

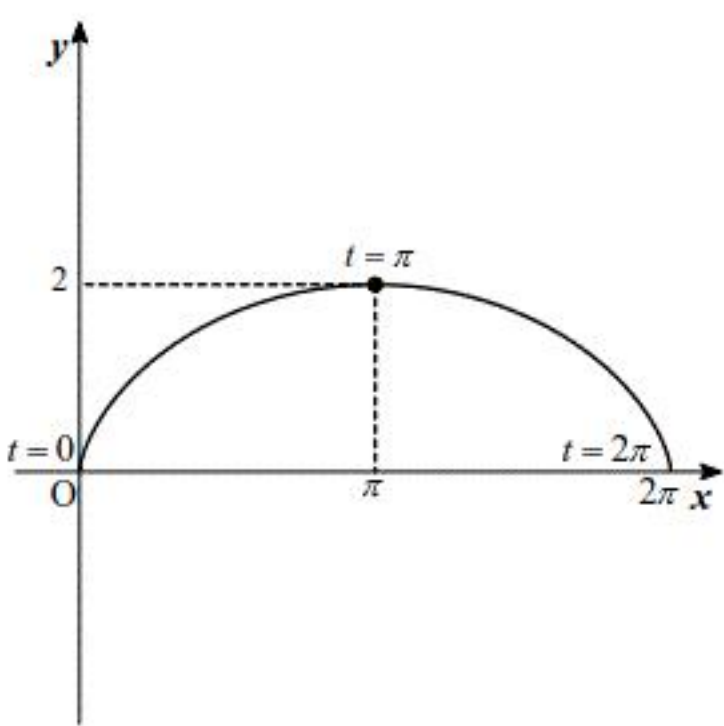
に注意して、増減表を書くと次のようになる。

t	0	...	π	...	2π
$\frac{dx}{dt}$	0	+	+	+	0
$\frac{dy}{dt}$	0	+	0	-	0
(x, y)	(0, 0)	$\nearrow$	$(\pi, 2)$	$\searrow$	$(2\pi, 0)$

また、

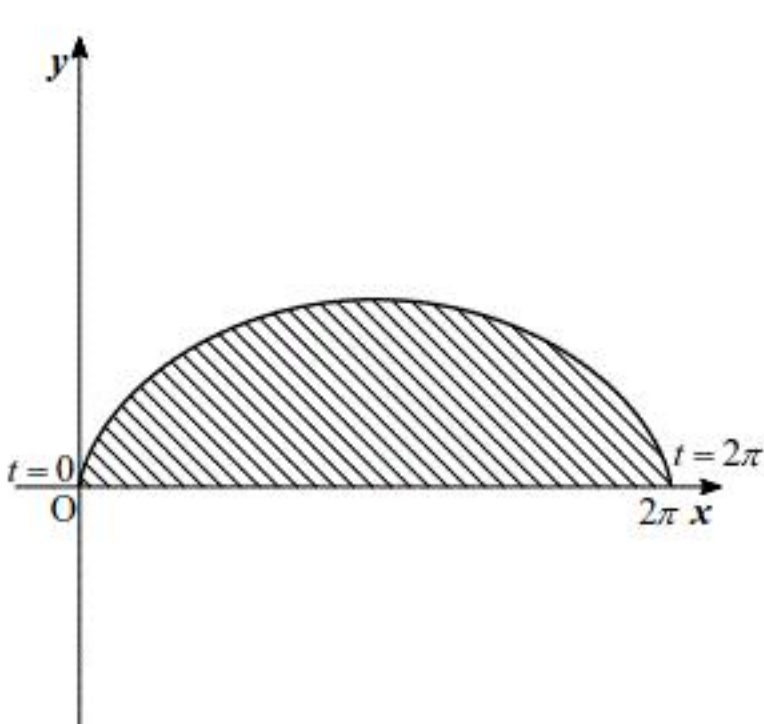
$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +0} \frac{dy}{dx} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1 + \cos t}{\sin t} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \frac{dy}{dx} &= \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \frac{\sin t(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} = \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \frac{1 + \cos t}{\sin t} = -\infty\end{aligned}$$

となるから、曲線 C の概形は下図のようになる。



(答) 前図

問 3



上の図の斜線部分の面積を求めればよい。

x	0	$\rightarrow$	2π
t	0	$\rightarrow$	2π

となるから、求める面積は、

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} y dx &= \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi\end{aligned}$$

となる。

(答) 3π

問 4

部分積分法を用いることにより、

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x - \int -2x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x - \left(-2x \sin x - \int -2 \sin x dx \right) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C_1\end{aligned}$$

となる。ただし、 C_1 は積分定数である。

(答) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C_1$

問 5

問 4 と同様に部分積分法を用いることにより、

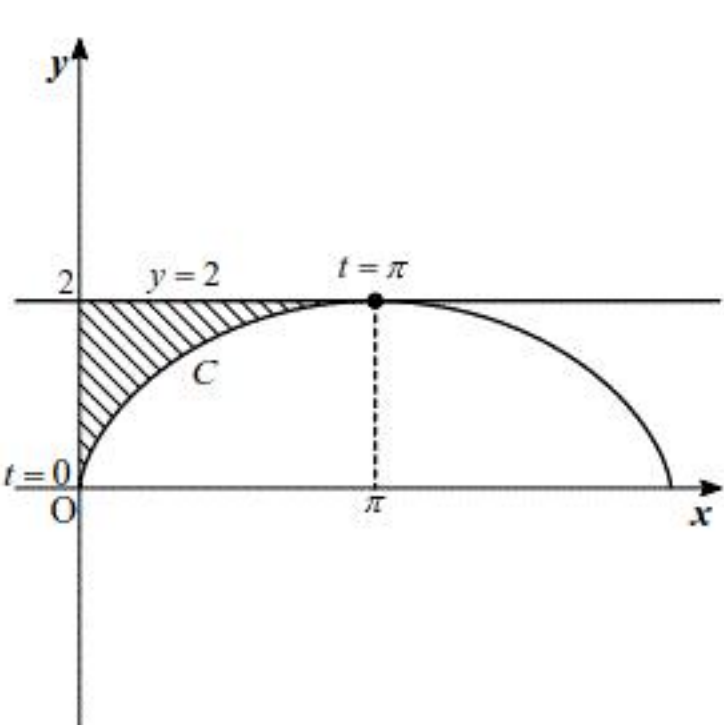
$$\begin{aligned}\int 2x \sin^2 x dx &= \int x(1 - \cos 2x) dx \\ &= \int x dx - \int x \cos 2x dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{2} x \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx \right) \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C_2\end{aligned}$$

となる。ただし、 C_2 は積分定数である。

(答) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C_2$

問 6

y 軸のまわりに 1 回転させる領域は下図の斜線部分である。



よって、

y	0	$\rightarrow$	2
t	0	$\rightarrow$	π

より、求める体積は、

$$\begin{aligned}\int_0^2 \pi x^2 dy &= \int_0^\pi \pi x^2 \frac{dy}{dt} dt \\ &= \pi \int_0^\pi (t - \sin t)^2 \sin t dt \\ &= \pi \left(\int_0^\pi t^2 \sin t dt - \int_0^\pi 2t \sin^2 t dt + \int_0^\pi \sin^3 t dt \right) \\ &= \pi \left(\int_0^\pi t^2 \sin t dt - \int_0^\pi 2t \sin^2 t dt + \int_0^\pi (\cos^2 t - 1)(\cos t)' dt \right) \\ &= \pi \left[\left(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \right) + \left(\frac{1}{3} \cos^3 t - \cos t \right) \right]_0^\pi \\ &= \pi \left\{ \left(\pi^2 + 0 - 2 - \frac{\pi^2}{2} + 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right) - \left(0 + 0 + 2 - 0 - 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right)$