

〔1〕

(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \sin x + \cos x &> \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2} &> \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} &> \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) &> \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2n\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{3}{4}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \\ \therefore \frac{\pi}{12} < x < \frac{7}{12}\pi \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{12} < x < \frac{7}{12}\pi$$

(2)

AB:BC:CA=3:4:5 より, 正の実数 x を用いて,
AB=3 x , BC=4 x , CA=5 x

と表せる。よって,

$$\begin{aligned}\text{AB}^2 + \text{BC}^2 - \text{CA}^2 &= (3x)^2 + (4x)^2 - (5x)^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

となるから, 三平方の定理の逆より, $\angle \text{ABC} = 90^\circ$ となる。したがって, $\triangle \text{ABC}$ の面積は1だから,

$$\begin{aligned}\triangle \text{ABC} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \text{AB} \cdot \text{BC} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{6} \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。また, 内接円の中心を点 O とし, その半径を r とすると,

$$\begin{aligned}\triangle \text{ABC} &= \triangle \text{ABO} + \triangle \text{BCO} + \triangle \text{CAO} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{2}r \cdot \text{AB} + \frac{1}{2}r \cdot \text{BC} + \frac{1}{2}r \cdot \text{CA} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2}{\text{AB} + \text{BC} + \text{CA}} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2}{3x + 4x + 5x} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2}{(3+4+5) \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}} \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{6}}{6}$$

(3)

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

より, 直線 l の式は,

$$\begin{aligned}r &= \frac{\sqrt{2}a}{\sin \theta - \cos \theta} \\ \Rightarrow r(\sin \theta - \cos \theta) &= \sqrt{2}a \\ \Leftrightarrow y - x &= \sqrt{2}a \\ \therefore x - y + \sqrt{2}a &= 0\end{aligned}$$

となる。また, 円 C の式は,

$$\begin{aligned}r &= 2 \cos \theta \\ \Rightarrow r^2 &= 2r \cos \theta \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 2x \\ \therefore (x-1)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

となる。直線 l と円 C が接することと, 点 $(1, 0)$ と直線 l の距離が1となることは同値だから, 点と直線の距離の公式より,

$$\begin{aligned}\frac{|1-0+\sqrt{2}a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} &= 1 \\ \Leftrightarrow |1+\sqrt{2}a| &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 1+\sqrt{2}a &= \pm\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm 1 \\ \therefore a &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

〔2〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4-1}} \cdot x - \sqrt{x^4-1} \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2x^4 - (x^4-1)}{x^2\sqrt{x^4-1}} \\ &= \frac{x^4+1}{x^2\sqrt{x^4-1}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $x>1$ のとき、 $x^4+1>0$, $x^2>0$, $\sqrt{x^4-1}>0$ となるから、 $f'(x)>0$ となる。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} x-f(x) &= x - \frac{\sqrt{x^4-1}}{x} \\ &= \frac{x^2 - \sqrt{x^4-1}}{x} \\ &= \frac{(x^2 - \sqrt{x^4-1})(x^2 + \sqrt{x^4-1})}{x(x^2 + \sqrt{x^4-1})} \left(\because x^2 + \sqrt{x^4-1} > 0 \right) \\ &= \frac{x^4 - (x^4-1)}{x(x^2 + \sqrt{x^4-1})} \\ &= \frac{1}{x(x^2 + \sqrt{x^4-1})} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

$x \rightarrow 1+0$ のとき、

$$x^4+1 \rightarrow 2, x^2 \rightarrow 1, \sqrt{x^4-1} \rightarrow +0$$

となるから、(1)の結果より、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^4+1}{x^2\sqrt{x^4-1}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

となる。また、 $x \rightarrow \infty$ のとき、

$$x^2 + \sqrt{x^4-1} \rightarrow \infty$$

となるから、(2)の結果より、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{x-f(x)\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(x^2 + \sqrt{x^4-1})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) = \infty$$

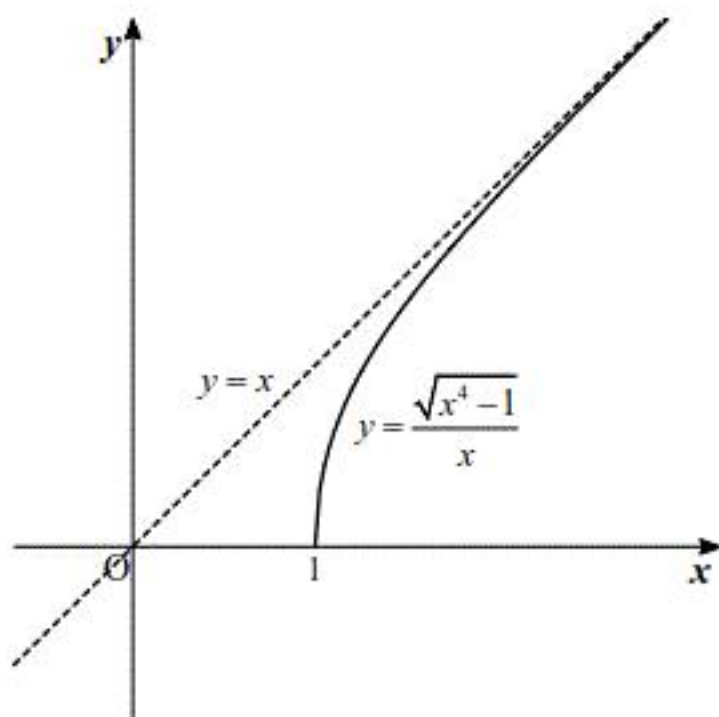
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{x-f(x)\} = 0$$

(4)

(3)の結果より、 $y=f(x)$ は直線 $y=x$ を漸近線にもつ。また、 $f(1)=0$ であり、 $x \geq 1$ のとき、

$$x-f(x) = \frac{1}{x(x^2 + \sqrt{x^4-1})} > 0$$

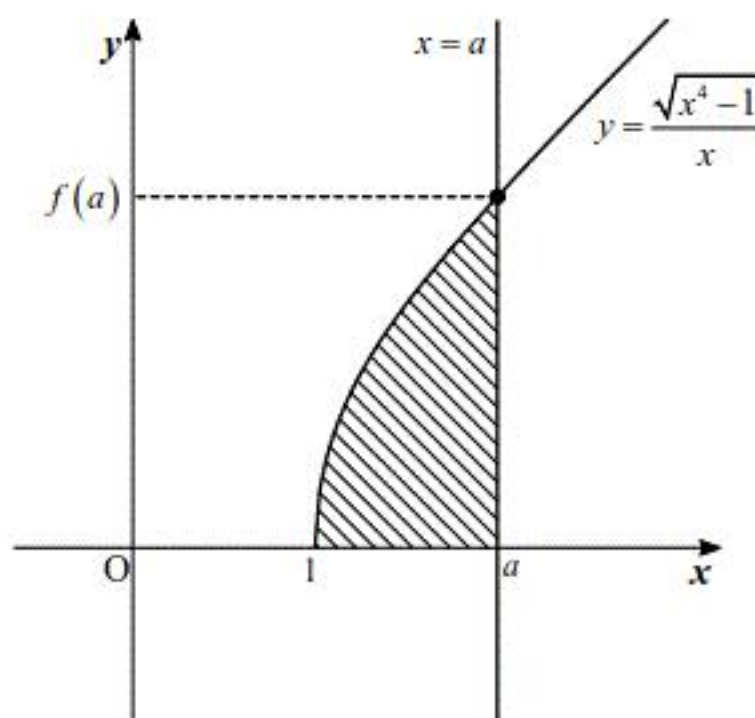
となることに注意すると、 $y=f(x)$ の概形は下図のようになる。



(答) 前図

(5)

x 軸の周りに1回転させる領域は下図の斜線部分である。



よって、求める体積は、

$$\begin{aligned} V &= \int_1^a \pi \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_1^a \left(\frac{x^4-1}{x^2} \right) dx \\ &= \pi \int_1^a \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} \right]_1^a \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{a} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{1} \right) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{a^3}{3} + \frac{1}{a} - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi \left(\frac{a^3}{3} + \frac{1}{a} - \frac{4}{3} \right)$$

〔3〕

(1)

$\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{c}$, $\overline{AD} = \vec{d}$ とする。正四面体 ABCD は1辺の長さが3だから、

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 3$$

であり、また、 $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 60^\circ$ だから、

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$$

となる。点 E は辺 CD を 1:2 に内分する点だから、 $\overline{AE} = \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$ である。よって、

$$\begin{aligned} |\overline{AE}| &= \sqrt{\left| \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d} \right|^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{4|\vec{c}|^2 + 4\vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{4 \cdot 3^2 + 4 \cdot \frac{9}{2} + 3^2} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{7}$

(2)

三角形の面積の公式より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 \cdot |\overline{AE}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AE})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 \cdot |\overline{AE}|^2 - \left\{ \vec{b} \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d} \right) \right\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 \cdot (\sqrt{7})^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \right)^2} \quad (\because (1)) \\ &= \frac{3\sqrt{19}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3\sqrt{19}}{4}$

(3)

点 A から $\triangle BCD$ に下した垂線の足を点 G とすると、対称性より、

$$\overline{AG} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$$

となる。よって、 $\triangle BCD$ を底面としたとき、底面積は $\triangle ABC$ の面積に等しく、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 \cdot |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 \cdot |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 \cdot 3^2 - \left(\frac{9}{2} \right)^2} \quad (\because (1)) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となり、高さは、

$$\begin{aligned} |\overline{AG}| &= \sqrt{\left| \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d} \right|^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2(\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{b})} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2 + 2 \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \right)} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

となるから、正四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} \\ &= \frac{9\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

(4)

四面体 ABED の体積を V' とすると、

$$\begin{aligned} V : V' &= CD : ED \\ \Leftrightarrow V : V' &= 3 : 2 \\ \Leftrightarrow V' &= \frac{2}{3}V \\ \Leftrightarrow V' &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} \\ \therefore V' &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (\because (3)) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3} S \cdot DH \\ \Leftrightarrow DH &= \frac{3V'}{S} \\ \Leftrightarrow DH &= \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{19}}{4}} \\ \therefore DH &= \frac{6\sqrt{38}}{19} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{6\sqrt{38}}{19}$

〔 4 〕

(1)

$$b_n = a_n + pn + q + (-1)^n r \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + p(n+1) + q + (-1)^{n+1} r \\ &= \{3a_n + 2n - 3 - 4 \cdot (-1)^n\} + pn + p + q - (-1)^n r \\ &= 3a_n + (2+p)n + (p+q-3) + (-1)^n \cdot (-4-r) \end{aligned}$$

となる。これと,

$$3b_n = 3a_n + 3pn + 3q + (-1)^n \cdot 3r$$

を比較して,

$$\begin{cases} 2+p=3p \\ p+q-3=3q \\ -4-r=3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=-1 \\ r=-1 \end{cases}$$

を得る。

(答) $p=1, q=-1, r=-1$

(2)

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + p \cdot 1 + q + (-1)^1 r \\ &= 2 + 1 + (-1) + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となるから, $b_{n+1} = 3b_n$ より,

$$\begin{aligned} b_n &= 3^{n-1} b_1 \\ &= 3^n \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - pn - q - (-1)^n r \\ &= 3^n - n + 1 + (-1)^n \end{aligned}$$

となる。

(答) $3^n - n + 1 + (-1)^n$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{3^k - k + 1 + (-1)^k\} \\ &= 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} - \frac{n(n+1)}{2} + n + (-1) \cdot \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} \\ &= \frac{3^{n+1} - 4 - n^2 + n + (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3^{n+1} - 4 - n^2 + n + (-1)^n}{2}$