

第1問

(1)

球を2回取り出すとき、点Pが原点にあるのは白球を1個、黒球を1個取り出したときである。
よって、求める確率は

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{8}{15}$$

(2)

球を8回取り出すとき、点Pの座標が2となるのは白球を5個、黒球を3個取り出したときである。球を取り出す順番は $\frac{8!}{5!3!}$ 通りであり、それぞれの確率は等しいから、求める確率は

$$\frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{{}_6P_5 \cdot {}_4P_3}{{}_{10}P_8} = \frac{8}{15}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{8}{15}$$

(3)

球を6回取り出すとき、2回目かつ6回目で点Pが原点にあるのは、最初の2回で白球を1個、黒球を1個取り出し、次の4回で白球を2個、黒球を2個取り出したときである。よって、求める確率は、(1)を利用すると

$$\frac{8}{15} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{{}_5P_2 \cdot {}_3P_2}{{}_8P_4} = \frac{8}{35}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{8}{35}$$

(4)

球を6回取り出すとき、6回目で点Pの座標が初めて4となるのは、5回目に点Pの座標が3であり、4回目に点Pの座標が2でなければならない。4回目に点Pの座標が2となるとき、それ以前に座標が4になることはなく、その確率は4回目までに白球を3個、黒球を1個取り出す確率であるから、

$$\frac{4!}{3!} \cdot \frac{{}_6P_3 \cdot {}_4P_1}{{}_{10}P_4} = \frac{8}{21}$$

である。したがって、求める確率は、さらに5回目、6回目に白球が出る確率であるから、

$$\frac{8}{21} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{105}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{8}{105}$$

第2問

(1)

C_1 について $y' = 4x$ であるから、接線 L の方程式は

$$y - 2 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 2$$

である。

(答) $L: y = 4x - 2$

(2)

C_2 について $y' = 2ax + b$ であるから、 C_2 上の点 $(1, 2)$ における接線が L であるとき、その傾きについて

$$2a + b = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 C_2 は 2 点 $(1, 2), (3, 2)$ を通るから、

$$2 = a + b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

$$2 = 9a + 3b + c \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。①、②、③より、 $a = -2, b = 8, c = -4$ と求まる。また、 C_2 の方程式は

$$y = -2x^2 + 8x - 4 \text{ となる。}$$

(答) $a = -2, b = 8, c = -4$

(3)(i)

曲線 C_2 と直線 $y = kx$ の交点の x 座標は、2 つの方程式から y を消去すると、

$$kx = -2x^2 + 8x - 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (k - 8)x + 4 = 0$$

$$\therefore x = \frac{8 - k \pm \sqrt{k^2 - 16k + 32}}{4}$$

となる。したがって、 $\alpha < \beta$ より、

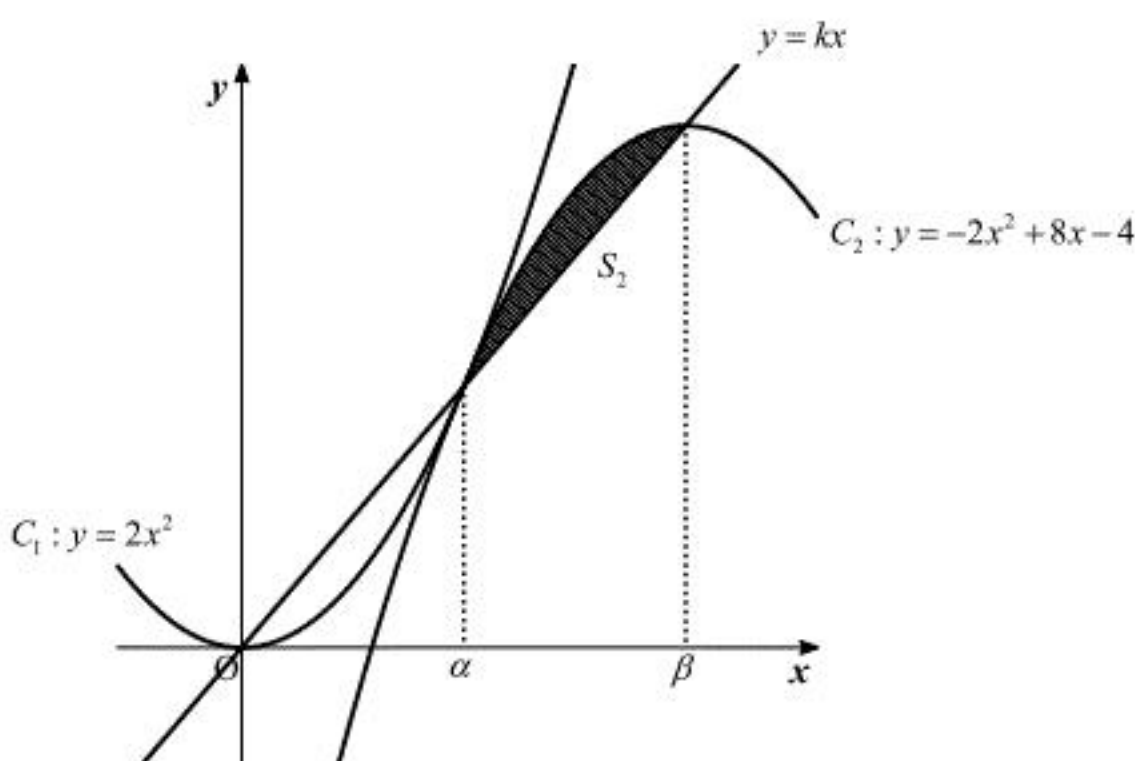
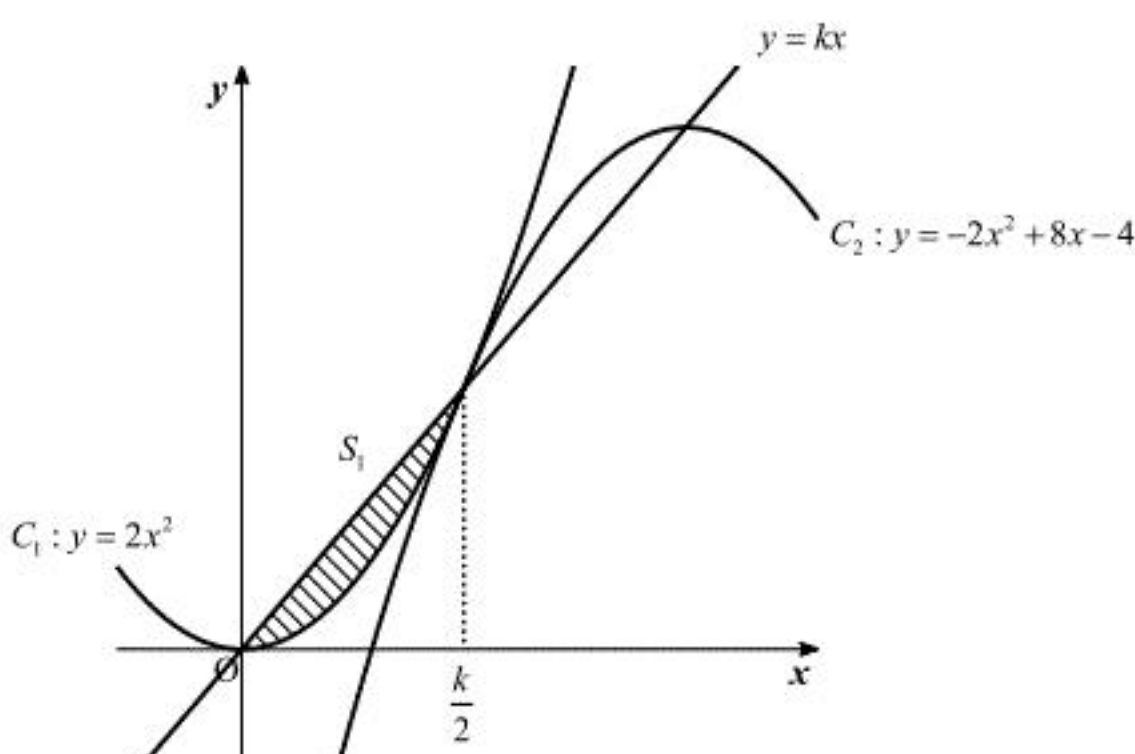
$$\alpha = \frac{8 - k - \sqrt{k^2 - 16k + 32}}{4}, \beta = \frac{8 - k + \sqrt{k^2 - 16k + 32}}{4}$$

である。

$$(答) \alpha = \frac{8 - k - \sqrt{k^2 - 16k + 32}}{4}, \beta = \frac{8 - k + \sqrt{k^2 - 16k + 32}}{4}$$

(ii)

曲線 $C_1: y = 2x^2$ と直線 $y = kx$ の交点の x 座標は、 $x = 0, \frac{k}{2}$ である。以下に、 S_1 を斜線部で、 S_2 を打点部で示す。



上図より、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{k}{2}} (kx - 2x^2) dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{k}{2}} x \left(x - \frac{k}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{k}{2} \right)^3 \\ &= \frac{k^3}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} (-2x^2 + 8x - 4 - kx) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{24} (k^2 - 16k + 32)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

であるから、 $S_1 = S_2$ のとき、 $k > 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} k^3 &= (k^2 - 16k + 32)^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow k^2 &= k^2 - 16k + 32 \\ \Leftrightarrow 16k - 32 &= 0 \\ \therefore k &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $k = 2$

第3問

(1)

条件より,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 - 2 - 3 = -3$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

であるから,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-\sqrt{21}}{14}$$

となる。

$$(答) \cos \theta = \frac{-\sqrt{21}}{14}$$

(2)

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin \theta > 0$ であるから, (1)の結果を用いると,

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{14} \sqrt{14^2 - 21} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

となる。よって, $\triangle AOB$ の面積は,

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

である。

$$(答) \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

(3)(i)

点Eは直線 L_1 上にあるから, 実数 l を用いて,

$$\overrightarrow{OE} = l\overrightarrow{OA} = (l, 2l, l)$$

と表せる。また, 点Fは直線 L_2 上にあるから, 実数 m を用いて,

$$\overrightarrow{OF} = m\overrightarrow{OB} = (2m, -m, -3m)$$

と表せる。ただし, $(l, m) \neq (0, 0)$ である。これより, $\overrightarrow{EF} = (2m - l, -m - 2l, -3m - l)$ と表せるから, $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{OC}$ より,

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - l - m - 2l - 3m - l = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2l$$

となる。ここで, $l \neq 0$ より $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ とすると, $\vec{a}$ は $\overrightarrow{EF} = (-5l, 0, 5l)$ に平行なベクトルの1つであり, 点Dが直線 L_3 上にあるから, 直線 L_3 上の任意の点をQとおくと, 実数 n を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OD} + n\vec{a} \\ &= (3, 2, -1) + n(-1, 0, 1) \\ &= (3 - n, 2, -1 + n) \end{aligned}$$

と表せる。したがって, 直線 L_3 と xy 平面の交点の座標は $z = 0 \Leftrightarrow n = 1$ のときの点Qの座標であるから, 求める座標は $(2, 2, 0)$ である。

$$(答) (2, 2, 0)$$

(ii)

(3)(i)より, 点Bと直線 L_3 上の点Qの距離は

$$\begin{aligned} \sqrt{\{2 - (3 - n)\}^2 + (-1 - 2)^2 + \{-3 - (-1 + n)\}^2} &= \sqrt{2n^2 + 2n + 14} \\ &= \sqrt{2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}} \end{aligned}$$

となるから, 点Bと直線 L_3 上の点との距離の最小値は $\frac{3\sqrt{6}}{2} \left(n = -\frac{1}{2}\right)$ となる。

$$(答) \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

第4問

(1)(i)

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\&= \frac{\sqrt{2}n}{6} \{(n+1)(2n+7) - (n-1)(2n+5)\} \\&= \sqrt{2}n(n+2)\end{aligned}$$

となる。 $a_1 = S_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 9}{6} = 3\sqrt{2}$ であるから、これは $n=1$ でも成立する。したがって、すべての自然数 n に対して $a_n = \sqrt{2}n(n+2)$ である。

(答) $a_n = \sqrt{2}n(n+2)$

(ii)

(i)より,

$$a_n > 220 \Leftrightarrow n(n+2) > 110\sqrt{2}$$

である。ここで、右辺について $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ より、 $154 < 110\sqrt{2} < 165$ である。また、左辺は単調増加であり、 $n=11$ のとき $11 \cdot 13 = 143$ であり、 $n=12$ のとき $12 \cdot 14 = 168$ である。したがって、 $a_n > 220$ となる最小の自然数 n は 12 である。

(答) $n=12$

(2)(i)

$b_{n+1} - b_n = 2n - 42$ より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 42) \\&= 417 + (n-1)n - 42(n-1) \\&= n^2 - 43n + 459\end{aligned}$$

となり、 $b_1 = 417$ であるから、これは $n=1$ のときも成立する。したがって、すべての自然数 n に対して $b_n = n^2 - 43n + 459$ である。

(答) $b_n = n^2 - 43n + 459$

(ii)

(i)より $b_n = \left(n - \frac{43}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$ と変形でき、 $21 < \frac{43}{2} < 22$ であるから $1 \leq n \leq 21$ で b_n は単調減少し、

$22 \leq n$ で b_n は単調増加する。ここで、 $b_{19} = 3$ 、 $b_{20} = -1$ 、 $b_{23} = -1$ 、 $b_{24} = 3$ であるから、 $b_n < 0$ となる自然数 n は、 $n = 20, 21, 22, 23$ である。

(答) $n = 20, 21, 22, 23$

第5問

(1)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= x \cdot (\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x (\log x)^2 - 2x \log x + 2 \int dx \\ &= x (\log x)^2 - 2(x \log x - x) + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x (\log x)^2 - 2(x \log x - x) + C$$

(2)

$(\log x)' = \frac{1}{x}$ より直線 L_a の方程式は

$$y - \log a = \frac{1}{a}(x - a) \Leftrightarrow y = \frac{x}{a} + \log a - 1$$

である。また、直線 L_1 の方程式は $y = x - 1$ であるから、 L_a と L_1 の交点の x 座標は

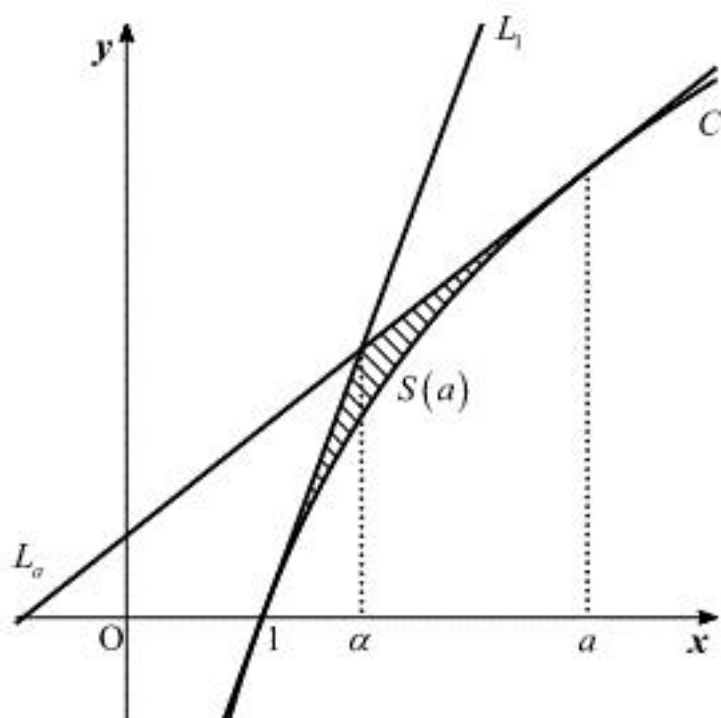
$$\begin{aligned}x - 1 &= \frac{x}{a} + \log a - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a-1}{a}x &= \log a \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{a-1} \log a \quad (\because a > 1)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad L_a: y = \frac{x}{a} + \log a - 1, \text{ 交点の } x \text{ 座標: } \frac{a}{a-1} \log a$$

(3)

$\alpha = \frac{a}{a-1} \log a$ とおいて、以下に $S(a)$ を斜線部で図示する。



上図より、

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_1^a (x - 1 - \log x) dx + \int_a^\alpha \left(\frac{x}{a} + \log a - 1 - \log x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x - (x \log x - x) \right]_1^a + \left[\frac{1}{2a}x^2 + (\log a - 1)x - (x \log x - x) \right]_a^\alpha \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \log x \right]_1^a + \left[\frac{1}{2a}x^2 + (\log a)x - x \log x \right]_a^\alpha \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\alpha^2 - \alpha \log a\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\frac{S(a)}{a} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \left(\frac{a}{a-1} \log a \right)^2 - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{a}{a-1} \log a \right)^2 - \frac{1}{a-1} (\log a)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} - \frac{a}{2a-2} \cdot \frac{(\log a)^2}{a}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(\log a)^2}{a} = 0$ より、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a} = \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a} = \frac{1}{2}$$

(4)

(3)の図より、(1)の結果を用いると、

$$\begin{aligned}V(a) &= \pi \int_1^a \left\{ (x-1)^2 - (\log x)^2 \right\} dx + \pi \int_a^\alpha \left\{ \left(\frac{x}{a} + \log a - 1 \right)^2 - (\log x)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_1^a (x-1)^2 dx + \pi \int_a^\alpha \left(\frac{x}{a} + \log a - 1 \right)^2 dx - \pi \int_1^a (\log x)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^a + \pi \left[\frac{a}{3} \left(\frac{x}{a} + \log a - 1 \right)^3 \right]_a^\alpha - \pi \left[x(\log x)^2 - 2(x \log x - x) \right]_1^a \\ &= \frac{\pi}{3}(\alpha-1)^3 + \frac{a\pi}{3}(\log a)^3 - \frac{a\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{a} + \log a - 1 \right)^3 - \pi \left\{ a(\log a)^2 - 2a \log a + 2a - 2 \right\} \\ &= \frac{\pi}{3}(\alpha-1)^3 + \frac{a\pi}{3}(\log a)^3 - \frac{a\pi}{3}(\alpha-1)^3 - \pi \left\{ a(\log a)^2 - 2a \log a + 2a - 2 \right\}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\frac{V(a)}{a \log a} &= \frac{\pi}{3a \log a}(\alpha-1)^3 + \frac{\pi}{3}(\log a)^2 - \frac{\pi}{3 \log a}(\alpha-1)^3 - \pi \left(\log a - 2 + \frac{2}{\log a} - \frac{2}{a \log a} \right) \\ &= \frac{(1-a)\pi}{3a \log a}(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1) + \frac{\pi}{3}(\log a)^2 - \pi \left(\log a - 2 + \frac{2}{\log a} - \frac{2}{a \log a} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left(-\alpha^2 + 3\alpha - 3 + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{\pi}{3}(\log a)^2 - \pi \log a + 2\pi - \pi \left(\frac{2}{\log a} - \frac{2}{a \log a} \right) \\ &= -\frac{\pi}{3}(\log a)^2 \left\{ \frac{a^2}{(a-1)^2} - 1 \right\} + \pi \log a \left(\frac{a}{a-1} - 1 \right) + \pi + \frac{(a-1)\pi}{3a \log a} - \pi \left(\frac{2}{\log a} - \frac{2}{a \log a} \right) \\ &= -\frac{\pi}{3} \frac{(\log a)^2}{a} \left\{ \frac{2a^2 - a}{(a-1)^2} \right\} + \pi \frac{\log a}{a} \left(\frac{a}{a-1} \right) + \pi + \frac{(a-1)\pi}{3a \log a} - \pi \left(\frac{2}{\log a} - \frac{2}{a \log a} \right)\end{aligned}$$

となる。よって、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log a}{a} = 0$ 、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(\log a)^2}{a} = 0$ より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{V(a)}{a \log a} = \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{V(a)}{a \log a} = \pi$$

第6問

(1)

条件式より,

$$z_2 = z_1 + \left(-\frac{4}{5}i\right) \times i = \frac{4}{5} + i$$

である。また,

$$z_3 = z_2 + \left(-\frac{4}{5}i\right)^2 \times i = \left(\frac{4}{5} + i\right) - \frac{16}{25}i = \frac{4}{5} + \frac{9}{25}i$$

であるから,

$$\begin{aligned} z_4 &= z_3 + \left(-\frac{4}{5}i\right)^3 \times i \\ &= \left(\frac{4}{5} + \frac{9}{25}i\right) - \frac{64}{125} \\ &= \frac{36}{125} + \frac{9}{25}i \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad z_2 = \frac{4}{5} + i, z_4 = \frac{36}{125} + \frac{9}{25}i$$

(2)

$\gamma_n = -i \times \overline{z_n}$ より, (1)の結果を利用すると,

$$\gamma_2 = -i \times \overline{z_2} = -i \left(\frac{4}{5} - i\right) = -1 - \frac{4}{5}i$$

$$\gamma_4 = -i \times \overline{z_4} = -i \left(\frac{36}{125} - \frac{9}{25}i\right) = -\frac{9}{25} - \frac{36}{125}i$$

である。

$$(\text{答}) \quad \gamma_2 = -\frac{4}{5} - i, \gamma_4 = -\frac{9}{25} - \frac{36}{125}i$$

(3)

$z_{n+1} - z_n = \left(-\frac{4}{5}i\right)^n \times i$ より, $n \geq 2$ のとき

$$z_n = z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(-\frac{4}{5}i\right)^k \times i \right\} = i + \frac{\frac{4}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{4}{5}i\right)^{n-1} \right\}}{1 - \left(-\frac{4}{5}i\right)}$$

が成り立ち, これは $n=1$ でも成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned} z_{2m} &= i + \frac{\frac{4}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{4}{5}i\right) \left(-\frac{16}{25}\right)^{m-1} \right\}}{1 + \frac{4}{5}i} \\ &= i + \frac{\frac{4}{5} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{5}i\right) \left(-\frac{16}{25}\right)^{m-1} \right\} \left(1 - \frac{4}{5}i\right)}{1 + \frac{16}{25}} \\ &= i + \frac{20}{41} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{5}i\right) \left(-\frac{16}{25}\right)^{m-1} - \frac{4}{5}i + \frac{16}{25} \left(-\frac{16}{25}\right)^{m-1} \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \gamma_{2m} &= -i \times \overline{z_{2m}} \\ &= -i \times \left[-i + \frac{20}{41} \left\{ 1 + \left(-\frac{4}{5}i\right) \left(-\frac{16}{25}\right)^{m-1} + \frac{4}{5}i + \frac{16}{25} \left(-\frac{16}{25}\right)^{m-1} \right\} \right] \\ &= -1 + \frac{20}{41} \left\{ -i + \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{16}{25}\right)^{m-1} + \frac{4}{5} - \frac{16}{25}i \left(-\frac{16}{25}\right)^{m-1} \right\} \end{aligned}$$

となる。よって, $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{16}{25}\right)^m = 0$ より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{2m} = -1 - \frac{20}{41}i + \frac{16}{41} = -\frac{25}{41} - \frac{20}{41}i$$

であるから,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = -\frac{25}{41}, \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = -\frac{20}{41}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = -\frac{25}{41}, \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = -\frac{20}{41}$$

(4)

(3)より,

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{25}{41} - \frac{20}{41}i \\ z &= -i \times \left(-\frac{25}{41} + \frac{20}{41}i\right) = \frac{20}{41} + \frac{25}{41}i \end{aligned}$$

であり, 点 w は点 z を点 γ のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点であるから,

$$\begin{aligned} w &= \gamma + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)(z - \gamma) \\ &= -\frac{25}{41} - \frac{20}{41}i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{45}{41} + \frac{45}{41}i\right) \\ &= \frac{-5 - 45\sqrt{3}}{82} + \frac{5 + 45\sqrt{3}}{82}i \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad w = \frac{-5 - 45\sqrt{3}}{82} + \frac{5 + 45\sqrt{3}}{82}i$$