

〔1〕

(1)

関数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \\ &= \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} \\ &= \frac{-4 \cos 2x}{\sin^2 2x} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{-4 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)}{\sin^2\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)} \\ &= \frac{-4 \cos \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -4\sqrt{2}$$

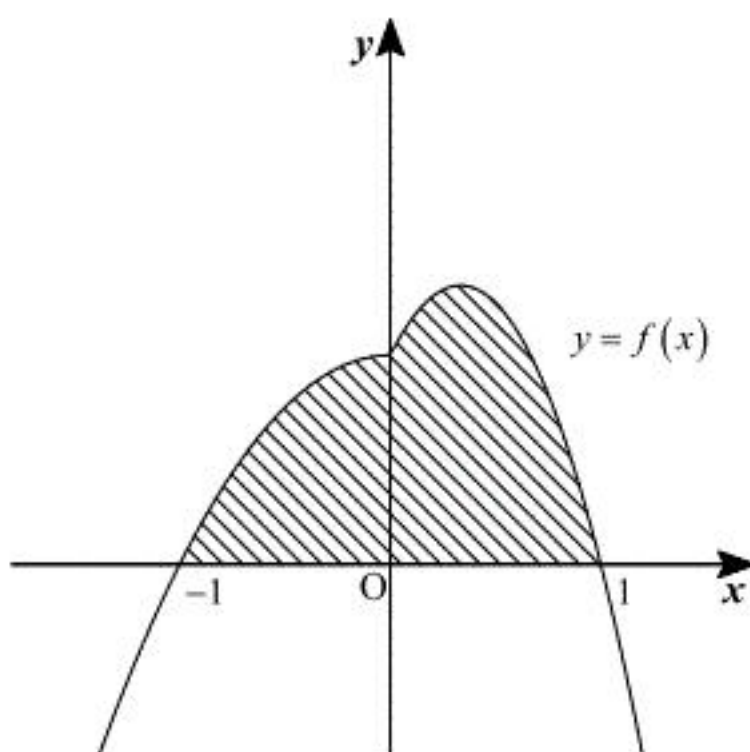
(2)

$$f(x) = (1-x)(2x+|x|+1)$$

とおくと

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)(1+3x) & (x \geq 0) \\ (1-x)(1+x) & (x < 0) \end{cases}$$

となるから、求める面積は以下の斜線部の面積である



したがって求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (1-x)(x+1) dx + \int_0^1 (1-x)(3x+1) dx &= \int_{-1}^0 (1-x^2) dx + \int_0^1 (-3x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 + \left[-x^3 + x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{3}$$

(3)

第1式を解くと

$$\begin{aligned} |x-1| &\leq 2 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq x-1 \leq 2 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq x \leq 3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

が得られる。第2式を解くと

$$\begin{aligned} x^2 - (2a+3)x + (a+5)(a-2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \{x - (a-2)\} \{a - (a+5)\} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a-2 &\leq x \leq a+5 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。①、②をとともに満たす実数 x が存在するような a の値の範囲は

$$\begin{aligned} \text{「} -1 \leq a+5 \text{」 かつ 「} 3 \geq a-2 \text{」} \\ \therefore -6 \leq a \leq 5 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -6 \leq a \leq 5$$

〔2〕

(1)

 $f(x) = xe^{-x}$ であるから

$$f'(x) = e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = (1-x)e^{-x}, \quad f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

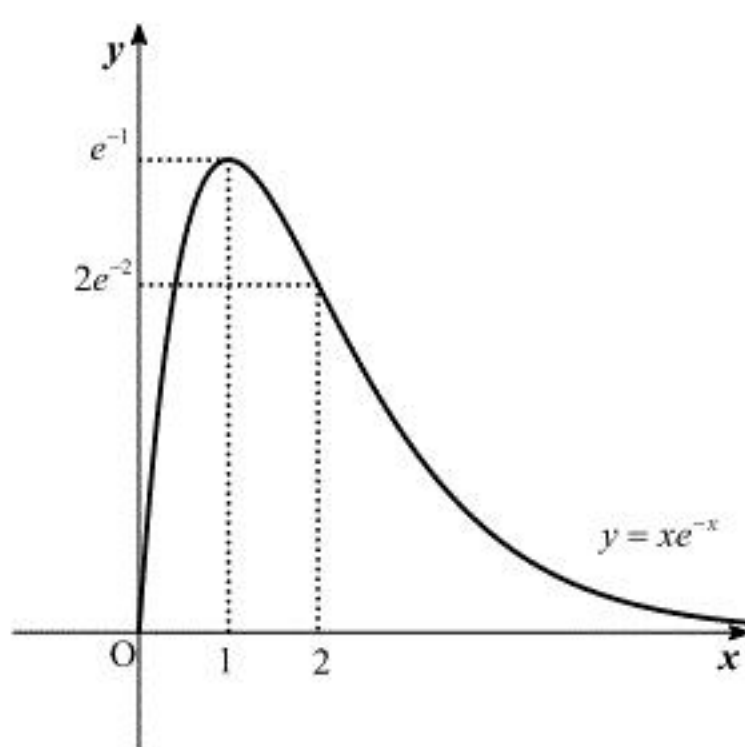
(2)

(1)より、 $f'(x) = 0$ を満たす x は $x=1$ であり、 $f''(x) = 0$ を満たす x は $x=2$ である。また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$$

であるから、 $f(x)$ の増減凹凸は以下の表のようになる。

x	0		1		2		$(-\infty)$
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	(0)

したがって、曲線 C の概形は以下のようになる。

(答) 前図

(3)

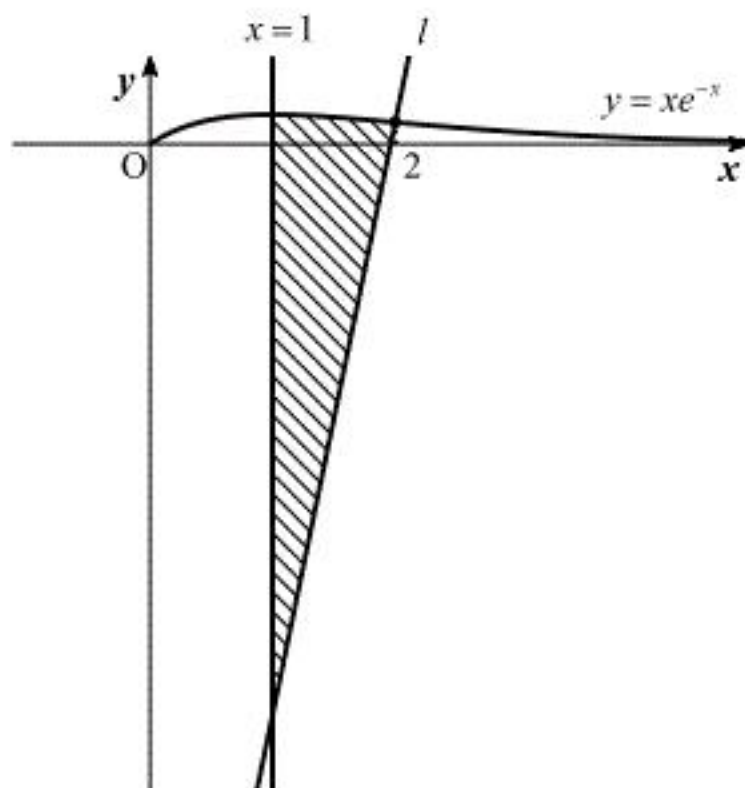
直線 l は傾き $-\frac{1}{f'(2)} = e^2$ で、点 $(2, 2e^{-2})$ を通る直線であるから、その方程式は

$$\begin{aligned} y &= e^2(x-2) + 2e^{-2} \\ \Leftrightarrow y &= e^2x + 2(e^{-2} - e^2) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad l: y = e^2x + 2(e^{-2} - e^2)$$

(4)

曲線 C 、直線 l および直線 $x=1$ で囲まれた図形は以下の斜線部である。よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left\{ xe^{-x} - \left\{ e^2x + 2(e^{-2} - e^2) \right\} \right\} dx \\ &= \int_1^2 x(-e^{-x})' dx + \int_1^2 (-xe^2 - 2e^{-2} + 2e^2) dx \\ &= \left[x(-e^{-x}) \right]_1^2 + \int_1^2 e^{-x} dx + \left[-\frac{1}{2}e^2x^2 - 2e^{-2}x + 2e^2x \right]_1^2 \\ &= -2e^{-2} + e^{-1} + \left[-e^{-x} \right]_1^2 - \frac{3}{2}e^2 - 2e^{-2} + 2e^2 \\ &= \frac{1}{2}e^2 + 2e^{-1} - 5e^{-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2}e^2 + 2e^{-1} - 5e^{-2}$$

〔3〕

(1)(i)

三角関数の合成より、

$$t = \sin x + \cos x + 1 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

であり、 $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$ のとき $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi$ であるから、 $0 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ である。したがって、

$$1 \leq t \leq \sqrt{2} + 1$$

である。

(答) $1 \leq t \leq \sqrt{2} + 1$

(ii)

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin x + \cos x + 1)^2 \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x + 2\sin x + 2\cos x + 1 \\ &= 1 + 2\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x + 1) - 1 \\ &= 2\sin x \cos x + 2t \end{aligned}$$

であるから、 $2\sin x \cos x = t^2 - 2t$ が得られる。したがって、

$$2\sin x \cos x - k(\sin x + \cos x + 1) = t^2 - 2t - kt = t^2 - (k+2)t$$

となるから、等式は示された。

(証明終)

(2)

(1)(ii)より、 $k=0$ のとき $y = t^2 - 2t = t(t-2)$ である。ここで、 $y=0$ を解くと、

$$t = 2 \quad (\because 1 \leq t \leq 1 + \sqrt{2})$$

である。このとき、 x の値は

$$\begin{aligned} t &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 &= 2 \\ \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \\ \Leftrightarrow x &= 0, \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $x = 0, \frac{\pi}{2}$

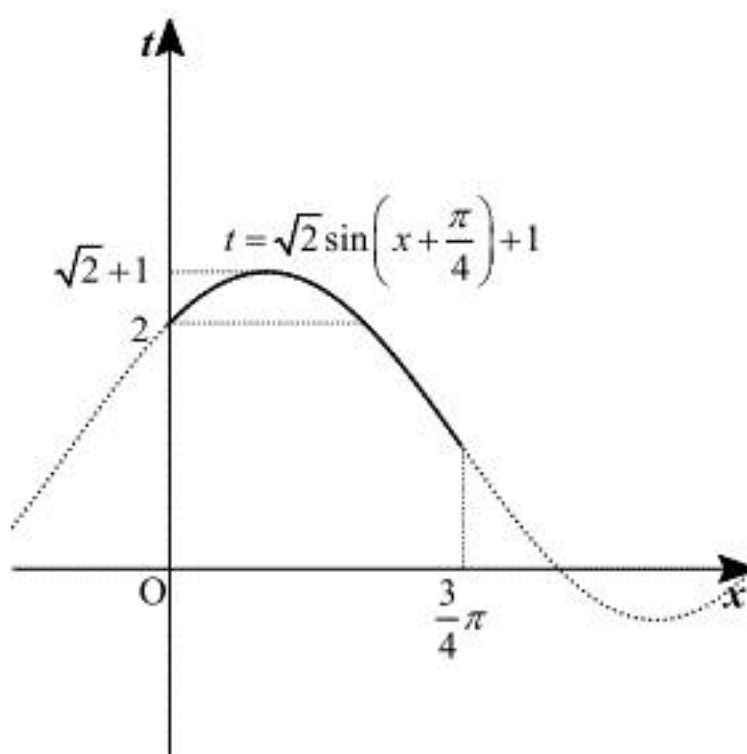
(3)

(1)(ii)より、 $y=0$ を満たす t は $t = k+2$ ($\because 1 \leq t \leq \sqrt{2} + 1$) である。よって、曲線 C と x 軸の共有点の個数は、 x についての方程式

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = k+2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の解の個数に等しい。また、①の解の個数は曲線 $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ と直線 $t = k+2$ の共有点

の個数に等しい。曲線 $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ を図示すると以下のようになる。



以上より、曲線 C と x 軸が共有点 2 つ存在もつような k の値の範囲は

$$\begin{aligned} 2 &\leq k+2 < \sqrt{2} + 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq k < \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $0 \leq k < \sqrt{2} - 1$

〔4〕

(1)

部分積分より、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a_{n+1}x + \frac{\pi}{2}a_n \right) \cos x dx \\ \Leftrightarrow a_{n+2} &= a_{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \frac{\pi}{2}a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ \Leftrightarrow a_{n+2} &= \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a_{n+1} + \frac{\pi}{2}a_n \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow a_{n+2} &= \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a_{n+1} + \frac{\pi}{2}a_n \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。①を変形すると、

$$a_{n+2} + a_{n+1} = \frac{\pi}{2}(a_{n+1} + a_n) \Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{\pi}{2}b_n$$

となるから、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 + a_2 = \pi + 1$ 、公比 $\frac{\pi}{2}$ の等差数列である。したがって、数列

$\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (\pi + 1)$$

である。

$$\text{(答)} \quad b_n = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (\pi + 1)$$

(3)

①を変形すると

$$a_{n+2} - \frac{\pi}{2}a_{n+1} = - \left(a_{n+1} - \frac{\pi}{2}a_n \right) \Leftrightarrow c_{n+1} = -c_n$$

となるから、数列 $\{c_n\}$ は初項 $a_2 - \frac{\pi}{2}a_1 = \frac{\pi}{2}$ 、公比 -1 の等比数列である。したがって、数列 $\{c_n\}$

の一般項は

$$c_n = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad c_n = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}$$

(4)

(2), (3)より

$$a_{n+1} + a_n = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (\pi + 1) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a_{n+1} - \frac{\pi}{2}a_n = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから、②-③より

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\pi}{2} \right) a_n &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (\pi + 1) - (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (\pi + 1) - (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (\pi + 1) - (-1)^{n-1} \pi}{2 + \pi}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a_n = \frac{2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (\pi + 1) - (-1)^{n-1} \pi}{2 + \pi}$$

(5)

(4)より

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^n (\pi + 1) - (-1)^n \pi}{2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} (\pi + 1) - (-1)^{n-1} \pi} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} (\pi + 1) + \left(-\frac{2}{\pi} \right)^{n-1} \pi}{2 (\pi + 1) - \left(-\frac{2}{\pi} \right)^{n-1} \pi}\end{aligned}$$

である。 $\left| -\frac{2}{\pi} \right| < 1$ に注意すると、求める極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} (\pi + 1) + 0 \cdot \pi}{2 (\pi + 1) - 0 \cdot \pi} = \frac{\pi}{2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi}{2}$$