

第 1 問

(1)

1 個のさいころについて、出る目が奇数になる確率は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ であるから、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

である。

(答) $\frac{1}{8}$

(2)

「 abc が偶数または 3 の倍数」は「 a, b, c のうち少なくとも 1 つが 2 の倍数または 3 の倍数」と同値である。ここで「 a, b, c のうち少なくとも 1 つが 2 の倍数または 3 の倍数」の余事象は「 a, b, c がいずれも 2 の倍数でも 3 の倍数でもない」ことに着目すると、求める確率は

$$1-\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{26}{27}$$

である。

(答) $\frac{26}{27}$

(3)

abc が偶数となるためには、 a, b, c のうち少なくとも 1 つが偶数になればよいから、その確率は(1)より $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ である。また、 abc が偶数かつ $a+b+c$ が奇数となるのは、 a, b, c のうち 2 つが偶数、1 つが奇数となる場合である。

[1] 2 つの偶数が異なる数のとき

$$a, b, c \text{ の組み合わせは } 3 \cdot {}_3C_2 \cdot 3!=54 \text{ 通り存在する。}$$

[2] 2 つの偶数が同じ数のとき

$$a, b, c \text{ の組み合わせは } 3 \cdot {}_3C_1 \cdot \frac{3!}{2!1!}=27 \text{ 通り存在する。}$$

以上, [1], [2] より、 abc が偶数かつ $a+b+c$ が奇数となる確率は

$$\frac{54+27}{6^3}=\frac{3}{8}$$

であり、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{7}$$

となる。

(答) $\frac{3}{7}$

(4)(i)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}ab \cdot c \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}abc \end{aligned}$$

より、 V が自然数となるためには abc が 6 の倍数にならなければならない。すなわち、 abc が 2 の倍数かつ 3 の倍数となる場合を考える。ここで、事象 A を「 abc が 2 の倍数」、事象 B を「 abc が 3 の倍数」として、事象 X が起こる確率を $P(X)$ と表すと

$$P(B)=1-\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{19}{27}$$

であり、加えて $P(A)=\frac{7}{8}, P(A \cup B)=\frac{26}{27}$ より、

$$\begin{aligned} P(A)+P(B)-P(A \cap B) &= P(A \cup B) \\ \Leftrightarrow \frac{7}{8}+\frac{19}{27}-P(A \cap B) &= \frac{26}{27} \\ \therefore P(A \cap B) &= \frac{133}{216} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{133}{216}$

(ii)

$a=b=c=6$ のとき、 $V=36$ であるから $12<V \leq 36$ となる a, b, c の組み合わせを考えればよい。 $12<V \leq 36$ を満たす自然数 V のうち 1~6 の自然数の積で表すことができるのは、
 $V=15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36$

である。よってこれら各々の場合の a, b, c の組み合わせの数を考えればよい。

V	条件を満たす数の組み合わせ	a, b, c の組み合わせの数
15	3, 5, 6	$3!=6$
16	4, 4, 6	${}_3C_1=3$
18	3, 6, 6	${}_3C_1=3$
20	4, 5, 6	$3!=6$
24	4, 6, 6	${}_3C_1=3$
25	5, 5, 6	${}_3C_1=3$
27	なし	0
30	5, 6, 6	${}_3C_1=3$
32	なし	0
36	6, 6, 6	1

上表より、求める確率は

$$\frac{6+3+3+6+3+3+0+3+0+1}{6^3}=\frac{7}{54}$$

である。

(答) $\frac{7}{54}$

第2問

(1)

$$\begin{aligned} y &= |x^2 - x - 2| \\ &= |(x+1)(x-2)| \end{aligned}$$

より、ここで $y=0$ とすれば、

$$\begin{aligned} |(x+1)(x-2)| &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 2 \end{aligned}$$

であり、 $x_1 = -1, x_2 = 2$ を得る。

(答) $x_1 = -1, x_2 = 2$

(2)

$$|(x+1)(x-2)| = \begin{cases} (x+1)(x-2) & (x \leq -1, x \geq 2) \\ -(x+1)(x-2) & (-1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

である。よって、 $y = (x+1)(x-2)$ ($x \leq -1, x \geq 2$) と直線 L の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2) &= 2(x+1) \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 4 \end{aligned}$$

である。一方、 $y = -(x+1)(x-2)$ ($-1 \leq x \leq 2$) と直線 L の共有点の x 座標は、

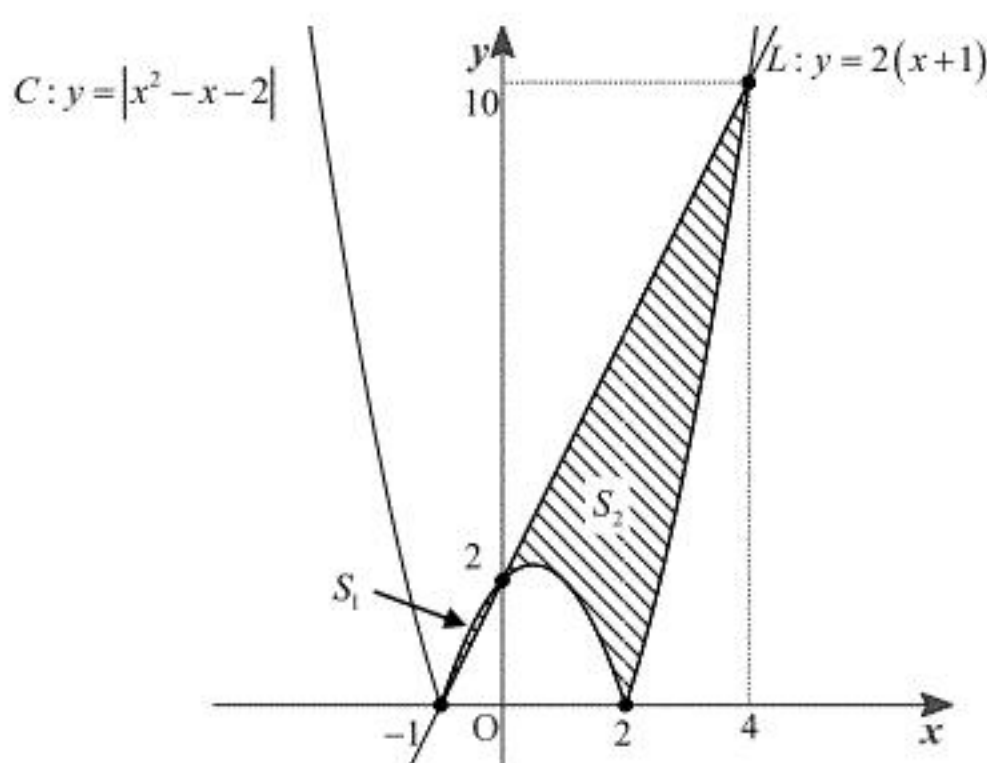
$$\begin{aligned} -(x+1)(x-2) &= 2(x+1) \\ \Leftrightarrow -x(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 0 \end{aligned}$$

であるから、 $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 4$ を得る。

(答) $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 4$

(3)

直線 L と曲線 C を図示すると下図のようになる。



上図より、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^0 \left[\{-(x+1)(x-2)\} - 2(x+1) \right] dx \\ &= \int_{-1}^0 -x(x+1) dx \\ &= \frac{1}{6} (0+1)^3 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{1}{6}$

(4)

前問の図より、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^2 \left[2(x+1) - \{-(x+1)(x-2)\} \right] dx + \int_2^4 \{2(x+1) - (x+1)(x-2)\} dx \\ &= \int_0^2 (x^2 + x) dx + \int_2^4 (-x^2 + 3x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_2^4 \\ &= \frac{14}{3} - 0 + \frac{56}{3} - \frac{34}{3} \\ &= 12 \end{aligned}$$

を得る。

(答) 12

第3問

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{OA}| &= \sqrt{4^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 0^2} = \frac{20}{3} \\ |\overline{OB}| &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = 5 \end{aligned}$$

であり、また

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 4 \cdot (-4) + \frac{16}{3} \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad |\overline{OA}| = \frac{20}{3}, |\overline{OB}| = 5, \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$$

(2)

Fは辺BOを1:2に内分する点であるから、 $\overline{OF} = \frac{2}{3}\overline{OB}$ より、 $\overline{AF} = \overline{OF} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OB}$ であ

る。また、Dは辺OAを1:2に内分する点であるから、 $\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OA}$ となり、Eは辺ABを1:2に

内分する点であるから、 $\overline{OE} = \frac{2}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB}$ となる。ここで、Pは線分AF上の点であるから、

実数 s ($0 < s < 1$)を用いて

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= s\overline{OA} + (1-s)\overline{OF} \\ &= s\overline{OA} + \frac{2}{3}(1-s)\overline{OB} \end{aligned}$$

と表せる。またPは線分DE上の点であるから、実数 t ($0 < t < 1$)を用いて

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= t\overline{OD} + (1-t)\overline{OE} \\ &= \left(-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right)\overline{OA} + \frac{1}{3}(1-t)\overline{OB} \end{aligned}$$

と表せる。今、 $\overline{OA}$ と $\overline{OB}$ は1次独立であるから、

$$\begin{cases} s = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}(1-s) = \frac{1}{3}(1-t) \end{cases}$$

を得る。この連立方程式を解くと、 $s = \frac{3}{5}, t = \frac{1}{5}$ であるから、 $\overline{OP} = \frac{3}{5}\overline{OA} + \frac{4}{15}\overline{OB}$ となる。

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= -\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OB} \\ (\text{答}) \quad \overline{OP} &= \frac{3}{5}\overline{OA} + \frac{4}{15}\overline{OB} \end{aligned}$$

(3)

Qは線分DF上の点であるから、実数 u ($0 < u < 1$)を用いて

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= u\overline{OD} + (1-u)\overline{OF} \\ &= \frac{1}{3}u\overline{OA} + \frac{2}{3}(1-u)\overline{OB} \end{aligned}$$

と表せる。またQは線分OE上の点であるから、実数 v ($0 < v < 1$)を用いて

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= v\overline{OE} \\ &= \frac{2}{3}v\overline{OA} + \frac{1}{3}v\overline{OB} \end{aligned}$$

と表せる。今、 $\overline{OA}$ と $\overline{OB}$ は1次独立であるから、

$$\begin{cases} \frac{1}{3}u = \frac{2}{3}v \\ \frac{2}{3}(1-u) = \frac{1}{3}v \end{cases}$$

を得る。この連立方程式を解くと、 $u = \frac{4}{5}, v = \frac{2}{5}$ であるから、 $\overline{OQ} = \frac{4}{15}\overline{OA} + \frac{2}{15}\overline{OB}$ となる。ま

た、Rは線分CQの中点であるから、

$$\begin{aligned} \overline{OR} &= \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OQ}) \\ &= \frac{2}{15}\overline{OA} + \frac{1}{15}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC} \end{aligned}$$

を得る。さらに、Sは線分CPを1:3に内分する点であるから、

$$\begin{aligned} \overline{OS} &= \frac{3}{4}\overline{OC} + \frac{1}{4}\overline{OP} \\ &= \frac{3}{20}\overline{OA} + \frac{1}{15}\overline{OB} + \frac{3}{4}\overline{OC} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= \frac{4}{15}\overline{OA} + \frac{2}{15}\overline{OB} \\ (\text{答}) \quad \overline{OR} &= \frac{2}{15}\overline{OA} + \frac{1}{15}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC} \\ \overline{OS} &= \frac{3}{20}\overline{OA} + \frac{1}{15}\overline{OB} + \frac{3}{4}\overline{OC} \end{aligned}$$

(4)

$\overline{OS} \perp \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{OS} \cdot \overline{BC} = 0$ より、

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{20}\overline{OA} + \frac{1}{15}\overline{OB} + \frac{3}{4}\overline{OC}\right) \cdot (\overline{OC} - \overline{OB}) = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{3}{20}\overline{OA} \cdot \overline{OC} - \frac{3}{20}\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \frac{1}{15}\overline{OB} \cdot \overline{OC} - \frac{1}{15}|\overline{OB}|^2 + \frac{3}{4}|\overline{OC}|^2 - \frac{3}{4}\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0 \\ \Leftrightarrow &-\frac{1}{15} \cdot 5^2 + \frac{3}{4}c^2 = 0 \left(\because \overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0, \overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0, |\overline{OC}|^2 = c^2 \right) \\ \therefore &c^2 = \frac{20}{9} \end{aligned}$$

を得る。よって、 $c > 0$ より $c = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

第4問

(1)

第4群の末項まで実際に数列を表示すると、以下の通りである。

$$2 \mid 4, 6, 8 \mid 10, 12, 14, 16, 18 \mid 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32 \mid$$

よって、 $a_4 = 32$ を得る。

(答) $a_4 = 32$

(2)

第 k 群には $2k-1$ 個の数が入るので、

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot \sum_{k=1}^n (2k-1) \\ &= 2 \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - n \right\} \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $a_n = 2n^2$

(3)

第5群の最初から2番目の数は、第4群の最後の数より2個後の数であるから、

$$a_4 + 2 \cdot 2 = 36$$

である。

(答) 36

(4)

第 n 群の最初から m 番目の数は、第 $n-1$ 群の最後の数より m 個後の数であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{n-1} + 2m &= 2(n-1)^2 + 2m \\ &= 2\{(n-1)^2 + m\} \end{aligned}$$

を得る。第1群の最初から m 番目の数は $2m$ だから、 $n=1$ のときもこれを満たす。

(答) $2\{(n-1)^2 + m\}$

(5)

$2 \cdot 12^2 < 300 < 2 \cdot 13^2 \Leftrightarrow a_{12} < 300 < a_{13}$ より、300は第13群にある。よって、

$$\begin{aligned} 2\{(13-1)^2 + m\} &= 300 \\ \Leftrightarrow 144 + m &= 150 \\ \therefore m &= 6 \end{aligned}$$

を得るので、300は第13群の6番目の数である。

(答) 第13群の6番目

(6)(i)

$$\begin{aligned} b_k &= 2\{(k+1-1)^2 + k\} \\ &= 2k^2 + 2k \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n (2k^2 + 2k) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)\{(2n+1)+3\} \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3} n(n+1)(n+2)$

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k^2 + 2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2(n+1)} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{n}{2(n+1)}$

第 5 問

(1)

[1] $a \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_1^e t^{a-1} dt &= \left[\frac{1}{a} t^a \right]_1^e \\ &= \frac{e^a - 1}{a}\end{aligned}$$

である。

[2] $a = 0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_1^e t^{-1} dt &= \left[\log |t| \right]_1^e \\ &= 1\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{e^a - 1}{a} \ (a \neq 0), 1 \ (a = 0)$

(2)

前問より

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

である。ここで、 $A(x) = e^x - 1 - \frac{x^2}{2}$ とすると、 $e^x > x$ より

$$A'(x) = e^x - x > 0$$

となり、 $A(x)$ は単調増加である。また、 $A(0) = 0$ より $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}A(x) &> A(0) \\ \Leftrightarrow e^x - 1 - \frac{x^2}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} &> \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow f(x) &> \frac{x}{2}\end{aligned}$$

となるから、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \infty$ より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ となる。一方、 $u = -x$ とすると、 $x \rightarrow -\infty$ のとき

$u \rightarrow \infty$ であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-u}}{-u} - \frac{1}{-u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{ue^u} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る。

(答) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

(3)

$$\begin{aligned}g'(x) &= e^x + (x-1)e^x - x \\ &= x(e^x - 1)\end{aligned}$$

であるから、 $g'(x) = 0$ とすれば $x = 0$ である。また、 $x > 0$ のとき $e^x > 1$ より $g'(x) > 0$ であり、 $x < 0$ のとき $e^x < 1$ より $g'(x) > 0$ である。よって、 $g'(x) > 0$ となる x の範囲は 0 以外のすべての実数となる。これより $g(x)$ について増減表を書くと、以下のようになる。

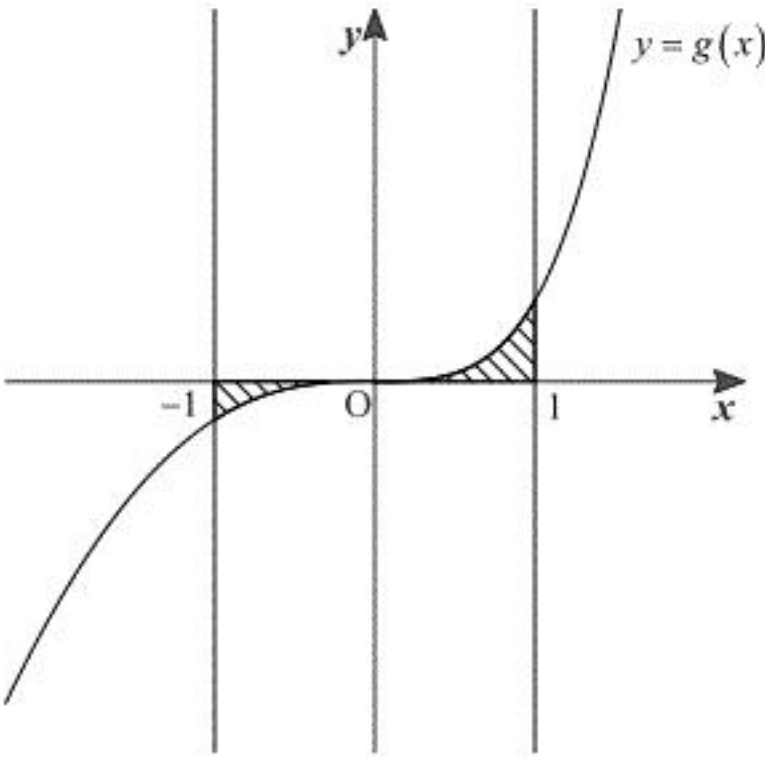
x	...	0	...
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	↗	0	↗

これより、 $g(x) > 0$ となる x の範囲は $x > 0$ である。

(答) $g'(x) > 0 : x$ は 0 以外のすべての実数、 $g(x) > 0 : x > 0$

(4)

曲線 $y = g(x)$ を図示すると以下のようになり、求める面積は下図の斜線部分の面積である



積分定数を C とすると、部分積分を用いて

$$\begin{aligned}\int (x-1)e^x dx &= (x-1)e^x - \int e^x dx \\ &= (x-1)e^x - e^x + C \\ &= (x-2)e^x + C\end{aligned}$$

であるから、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 \left\{ (x-1)e^x + 1 - \frac{x^2}{2} \right\} dx + \int_{-1}^0 - \left\{ (x-1)e^x + 1 - \frac{x^2}{2} \right\} dx \\ &= \left[(x-2)e^x + x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 - \left[(x-2)e^x + x - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^0 \\ &= \left(-e + \frac{5}{6} \right) - (-2) - (-2) + \left(-\frac{3}{e} - \frac{5}{6} \right) \\ &= 4 - e - \frac{3}{e}\end{aligned}$$

である。

(答) $4 - e - \frac{3}{e}$

(5)

$B(x) = e^x$ とすると、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{B(x) - B(0)}{x - 0} \ (\because B(0) = 1) \\ &= B'(0) \\ &= 1 \ (\because B'(x) = e^x)\end{aligned}$$

より $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ となるから、 $f(x)$ は連続である。よって、 $h(x) = f(x) - \frac{x}{2}$ とおくと

$h(x)$ も連続である。 $x \neq 0$ のとき、 $h(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ より、

$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left\{ (x-1)e^x + 1 - \frac{x^2}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{x^2} g(x)\end{aligned}$$

であり、 $\frac{1}{x^2} > 0$ より $h'(x)$ と $g(x)$ の正負の符号は一致する。ここで、 $h(0) = 1$ かつ $h(x)$ は連続であるから、 $h(x)$ について増減表を書くと以下のようになる。

x	...	0	...
$h'(x)$	-	↗	+
$h(x)$	↘	1	↗

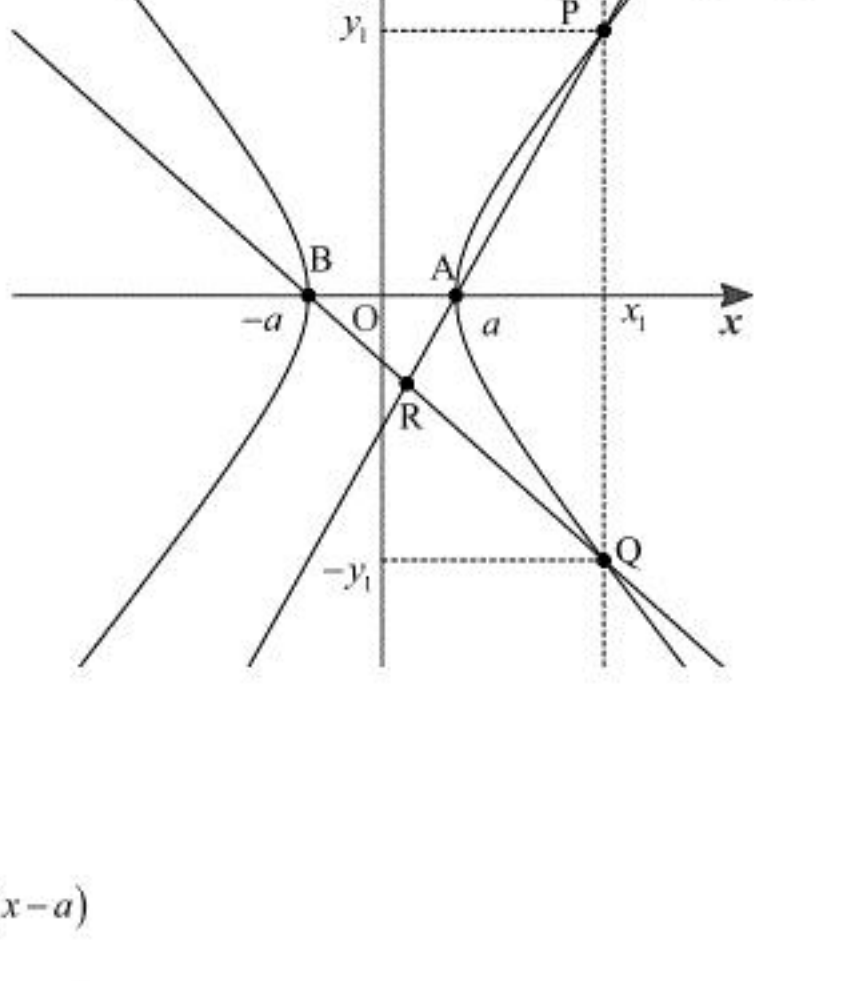
よって、 $h(x)$ は $x = 0$ で極小値 1 を持つ。

(答) $x = 0$ のとき極小値 1

第6問

(1)

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ および点 A, B, P, Q, R を図示すると以下のようになる。 ($x_1 > 0, y_1 > 0$ としたとき)



直線 AP の式は、

$$y - 0 = \frac{y_1 - 0}{x_1 - a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{y_1}{x_1 - a}(x - a)$$

であり、直線 BQ の式は、

$$y - 0 = \frac{-y_1 - 0}{x_1 - (-a)}(x + a)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{y_1}{x_1 + a}(x + a)$$

であるので、これらの交点 R の x 座標は

$$\frac{y_1}{x_1 - a}(x - a) = -\frac{y_1}{x_1 + a}(x + a)$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x_1 + a) = -(x + a)(x_1 - a) \quad (\because x_1 \neq \pm a, y_1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x_1 x + ax - ax_1 - a^2 = -x_1 x + ax - ax_1 + a^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 x = 2a^2$$

$$\therefore x = \frac{a^2}{x_1}$$

である。このとき $x = \frac{a^2}{x_1}$ を直線 AP の式に代入すると、 $y = \frac{y_1}{x_1 - a}\left(\frac{a^2}{x_1} - a\right) = -\frac{y_1}{x_1}a$ より、

R $\left(\frac{a^2}{x_1}, -\frac{y_1}{x_1}a\right)$ を得る。

$$(\text{答}) \text{ R } \left(\frac{a^2}{x_1}, -\frac{y_1}{x_1}a\right)$$

(2)

R (x, y) とすると、前問より

$$\begin{cases} x = \frac{a^2}{x_1} \\ y = -\frac{y_1}{x_1}a \end{cases}$$

である。 $a > 0$ と $x_1 \neq 0$ ($\because |x_1| > a > 0$) より $x = \frac{a^2}{x_1} \neq 0$ となるから、 $x = \frac{a^2}{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{a^2}{x}$ となること

に注意すると、R (x, y) が満たすべき条件は、

$$x = \frac{a^2}{x_1} \text{ かつ } y = -\frac{y_1}{x_1}a \text{ かつ } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ かつ } |x_1| > a \text{ となる } x_1, y_1 \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{a^2}{x} \text{ かつ } y_1 = -\frac{x_1 y}{a} \text{ かつ } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ かつ } |x_1| > a \text{ となる } x_1, y_1 \text{ が存在する}$$

$$(\because x_1 \neq 0, a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{a^2}{x} \text{ かつ } y_1 = -\frac{y}{x}a \text{ かつ } \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2}{x}\right)^2 - \frac{1}{b^2}\left(-\frac{y}{x}a\right)^2 = 1 \text{ かつ } \left|\frac{a^2}{x}\right| > a \text{ となる } x_1, y_1 \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} - \frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} = 1 \text{ かつ } \left|\frac{a^2}{x}\right| > a$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ かつ } 0 < |x| < a \quad (\because a > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ かつ } x \neq 0 \text{ かつ } y \neq 0$$

となる。よって、R の軌跡は楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ただし $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$ を除く)

である。

$$(\text{答}) \text{ 楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (ただし } (a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b) \text{ を除く)}$$

(3)

$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に代入すると、

$$\frac{r^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \phi}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2} = \frac{1}{r^2}$$

を得る。このとき、

$$\begin{cases} x \neq 0 \Leftrightarrow r \cos \phi \neq 0 \\ y \neq 0 \Leftrightarrow r \sin \phi \neq 0 \end{cases}$$

であるから、 $\phi \neq \frac{k}{2}\pi$ (k は整数)を得る。

$$(\text{答}) \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2} = \frac{1}{r^2} \text{ (ただし } \phi \neq \frac{k}{2}\pi \text{ (} k \text{ は整数))}$$

(4)

$L(\theta)$ は L を原点を中心にして反時計回りに θ だけ回転させた図形であるから、

$$L(\theta) : \frac{\cos^2(\phi - \theta)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi - \theta)}{b^2} = \frac{1}{r^2} \quad (\text{ただし } \phi - \theta \neq \frac{l}{2}\pi \text{ (} l \text{ は整数)})$$

と表せる。よって、 $L(\theta)$ と L の交点を考えると、

$$\frac{\cos^2(\phi - \theta)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi - \theta)}{b^2} = \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \{ \cos^2(\phi - \theta) - \cos^2 \phi \} + \frac{1}{b^2} \{ \sin^2(\phi - \theta) - \sin^2 \phi \} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \{ \cos(\phi - \theta) + \cos \phi \} \{ \cos(\phi - \theta) - \cos \phi \} + \frac{1}{b^2} \{ \sin(\phi - \theta) + \sin \phi \} \{ \sin(\phi - \theta) - \sin \phi \} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \cdot 2 \cos \frac{2\phi - \theta}{2} \cos \frac{-\theta}{2} \cdot \left(-2 \sin \frac{2\phi - \theta}{2} \sin \frac{-\theta}{2} \right) + \frac{1}{b^2} \cdot 2 \sin \frac{2\phi - \theta}{2} \cos \frac{-\theta}{2} \cdot 2 \cos \frac{2\phi - \theta}{2} \sin \frac{-\theta}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin \left(\phi - \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\phi - \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 0$$

を得る。ここで、 $0 < \theta < \pi$ より $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0, \cos \frac{\theta}{2} \neq 0$ であり、さらに $a \neq b$ であるから

$\sin \left(\phi - \frac{\theta}{2} \right) = 0$ または $\cos \left(\phi - \frac{\theta}{2} \right) = 0$ である。よって、 $\phi = \frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi$ ($m = 0, 1, 2, 3$) を得る。こ

で、 $\phi = \frac{k}{2}\pi$ のとき、

$$\frac{k}{2}\pi = \frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \Leftrightarrow \theta = (k - m)\pi$$

となるが、 $0 < \theta < \pi$ よりこれを満たす k, m は存在しない。また、 $\phi - \theta = \frac{l}{2}\pi$ のとき、

$$\frac{l}{2}\pi + \theta = \frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \Leftrightarrow \theta = (m - l)\pi$$

となるが $0 < \theta < \pi$ よりこれを満たす l, m は存在しない。したがって、 L と $L(\theta)$ は $\phi = \frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi$

に交点を持つ。このとき、 $\phi = \frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi$ を $\frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2} = \frac{1}{r^2}$ に代入すると、

$$\frac{\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right)}{a^2} + \frac{\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right)}{b^2} = \frac{1}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right)}{a^2 b^2} = \frac{1}{r^2}$$

となり、この逆数をとって、

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right)}$$

$$\therefore r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right)}} \quad (\because r > 0, a > 0, b > 0)$$

を得る。

$$(\text{答}) \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right)}}, \frac{\theta}{2} + \frac{m}{2}\pi \right) \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

(5)

前問より、

$$V_1 \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \frac{\theta}{2} \right)$$

$$V_2 \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right)}}, \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$V_3 \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right)}}, \frac{\theta}{2} + \pi \right)$$

$$V_4 \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\pi \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\pi \right)}}, \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\pi \right)$$

となるから、 $\angle V_1 O V_2 = \angle V_2 O V_3 = \angle V_3 O V_4 = \angle V_4 O V_1 = \frac{\pi}{2}$ である。よって、 $V_1 V_3 \perp V_2 V_4$ である。

ここで、

$$V_1 V_3 = \sqrt{\frac{ab}{b^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} + \sqrt{\frac{ab}{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right)}}$$

$$= \frac{2ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

であり、また

$$V_2 V_4 = \sqrt{\frac{ab}{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right)}} + \sqrt{\frac{ab}{b^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\pi \right) + a^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\pi \right)}}$$

$$= \frac{2ab}{\sqrt{b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}$$

である。ここで四角形 $V_1 V_2 V_3 V_4$ の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot V_1 V_3 \cdot V_2 V_4$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{2ab}{\sqrt{b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$$= 2a^2 b^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 \left(\sin^4 \frac{\theta}{2} + \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) + (a^4 + b^4) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}}$$

であるから、 S が最小値をとるときは、 $a^2 b^2 \left(\sin^4 \frac{\theta}{2} + \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) + (a^4 + b^4) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$ が最大値

をとるときである。ここで、

$$a^2 b^2 \left(\sin^4 \frac{\theta}{2} + \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) + (a^4 + b^4) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= a^2 b^2 \left\{ \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \right\} + (a^4 + b^4) \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right)^2$$

$$= a^2 b^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) + \frac{1}{4} \sin^2 \theta (a^4 + b^4)$$

$$= a^2 b^2 \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \sin^2 \theta (a^4 + b^4)$$

$$= a^2 b^2 \left\{ \frac{1}{2} (1 - \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{4} \sin^2 \theta (a^4 + b^4)$$

$$= \frac{1}{4} (a^4 + b^4 - 2a^2 b^2) \sin^2 \theta + a^2 b^2$$

$$= \frac{1}{4} (a^2 - b^2)^2 \sin^2 \theta + a^2 b^2$$

であり、このとき、 $(a^2 - b^2)^2 > 0, 0 < \sin^2 \theta \leq 1$ より $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値

$$\frac{1}{4} (a^2 - b^2)^2 + a^2 b^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)^2$$

をとる。このとき、

$$S = 2a^2 b^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} (a^2 + b^2)^2}}$$

$$= \frac{4a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

である。

$$(\text{答}) \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{4a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$