

[1]

(1)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{4}$

(2)

まず、

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

である。したがって、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^{-27} &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{-27} \\ &= \cos \left(-27 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-27 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \cos \left(-\frac{9\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{9\pi}{2} \right) \\ &= 0 + i \cdot (-1) \\ &= -i\end{aligned}$$

となる。

(答) $-i$

(3)

まず、 m, n は自然数より、 $3mn \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot 3mn &= \frac{4}{3} \cdot 3mn \\ \Leftrightarrow 3(m+1)(n+1) &= 4mn \\ \Leftrightarrow 3mn + 3m + 3n + 3 &= 4mn \\ \Leftrightarrow mn - 3m - 3n - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow mn - 3m - 3n + 9 &= 12 \\ \Leftrightarrow (m-3)(n-3) &= 12\end{aligned}$$

となる。ここで、 m, n は $m < n$ を満たす自然数より、 $m-3, n-3$ は $-3 < m-3 < n-3$ を満たす整数である。したがって、

$$(m-3, n-3) = (1, 12), (2, 6), (3, 4)$$

であるから、

$$(m, n) = (4, 15), (5, 9), (6, 7)$$

となる。

(答) $(m, n) = (4, 15), (5, 9), (6, 7)$

〔2〕

(1)

まず、 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ であり、 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

まず、点Pは辺ABを1:2に内分するから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

である。また、 $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP}$ であるから、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(\frac{2}{3}t - 1\right)\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \left(\frac{t}{3} - 1\right)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)(i)

まず、 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ より、

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 = 1$$

である。また(1)より、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}$$

である。また(2)より、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{2}{3}t - 1\right)\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \left(\frac{t}{3} - 1\right)\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}S &= |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{AQ}|^2 + |\overrightarrow{BQ}|^2 \\ &= \left|\frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\left(\frac{2}{3}t - 1\right)\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \left(\frac{t}{3} - 1\right)\overrightarrow{OB}\right|^2 \\ &= \frac{4}{9}t^2|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{4}{9}t^2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{t^2}{9}|\overrightarrow{OB}|^2 + \left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 1\right)|\overrightarrow{OA}|^2 + \left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{2}{3}t\right)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &\quad + \frac{t^2}{9}|\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{4}{9}t^2|\overrightarrow{OA}|^2 + \left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t\right)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \left(\frac{t^2}{9} - \frac{2}{3}t + 1\right)|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{9}t^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{t^2}{9} + \frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 1 + \left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{2}{3}t\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{t^2}{9} + \frac{4}{9}t^2 + \left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{3}t + 1 \\ &= \frac{7}{3}t^2 - 3t + 2\end{aligned}$$

(答) $S = \frac{7}{3}t^2 - 3t + 2$

(ii)

(3)(i)の式を変形すると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{7}{3}t^2 - 3t + 2 \\ &= \frac{7}{3}\left(t - \frac{9}{14}\right)^2 + \frac{29}{28}\end{aligned}$$

となるから、 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、 S は $t = \frac{9}{14}$ で最小値 $\frac{29}{28}$ を取る。

(答) $t = \frac{9}{14}$ のとき最小値 $S = \frac{29}{28}$

[3]

(1)

求める式を数列 $\{a_n\}$ を用いて表すと,

$$\begin{aligned} 3b_{n+1}-b_n &= 3(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n) \\ &= 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n \end{aligned}$$

となる。与式

$$3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=4+\frac{1}{2^{n+1}}$$

を用いると,

$$3b_{n+1}-b_n=4+\frac{1}{2^{n+1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 3b_{n+1}-b_n=4+\frac{1}{2^{n+1}}$$

(2)

与式を変形すると,

$$\begin{aligned} c_n &= b_n - \frac{1}{2^n} - 2 \\ \Leftrightarrow b_n &= c_n + \frac{1}{2^n} + 2 \end{aligned}$$

となる。これを(1)の式に代入すると,

$$\begin{aligned} 3b_{n+1}-b_n &= 4+\frac{1}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow 3\left(c_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}+2\right)-\left(c_n+\frac{1}{2^n}+2\right) &= 4+\frac{1}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow 3c_{n+1}+\frac{3}{2^{n+1}}+6-c_n-\frac{2}{2^{n+1}}-2 &= 4+\frac{1}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow 3c_{n+1} &= c_n \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= \frac{1}{3}c_n \end{aligned}$$

となり, 数列 $\{c_n\}$ が等比数列であることが示された。

(証明終)

数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めるために, 数列 $\{c_n\}$ の初項を求める。与式を利用すると, 初項は,

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 - \frac{1}{2^1} - 2 \\ &= a_2 - a_1 - \frac{1}{2^1} - 2 \\ &= \frac{17}{6} - 0 - \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。したがって数列 $\{c_n\}$ は, 初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから, 一般項は,

$$c_n = \frac{1}{3^n}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_n = \frac{1}{3^n}$$

(3)

(2)より,

$$\begin{cases} b_n = c_n + \frac{1}{2^n} + 2 \\ c_n = \frac{1}{3^n} \end{cases}$$

であるから, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は,

$$b_n = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} + 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} + 2$$

(4)

(3)と $b_n = a_{n+1} - a_n$ より,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} + 2$$

となるから, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{2^k} + 2 \right) \\ &= 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} + 2(n-1) \quad (\because a_1 = 0) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right) + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + 2n - 2 \\ &= 2n - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成立するから, 自然数 n について,

$$a_n = 2n - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2n - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{2}$$

[4]

(1)

左辺を変形すると、

$$\begin{aligned}\int_{x-1}^{x+2n-1} f(t) dt &= \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt + \int_{(x+2)-1}^{(x+2)+1} f(t) dt + \cdots + \int_{\{x+2(n-1)\}-1}^{\{x+2(n-1)\}+1} f(t) dt \\ &= x^3 + (x+2)^3 + \cdots + \{x+2(n-1)\}^3 \\ &= \sum_{k=1}^n \{x+2(k-1)\}^3\end{aligned}$$

となり、右辺と等しくなる。よって等式が示された。

(証明終)

(2)(i)

$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると、

$$F(x+1) - F(x-1) = x^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 $F(x)$ について、

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

が成り立つから、 $\textcircled{1}$ の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} F(x+1) - \frac{d}{dx} F(x-1) &= \frac{d}{dx} x^3 \\ \Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) &= 3x^2\end{aligned}$$

となり、等式が示された。

(証明終)

(ii)

$f(x)$ は 3 次関数であるから、実数 a, b, c, d ($a \neq 0$) を用いて、

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

と置ける。(2)(i) で示した等式にこれを代入すると、

$$\begin{aligned}\{a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d\} - \{a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d\} &= 3x^2 \\ \Leftrightarrow a(6x^2 + 2) + b(4x) + c \cdot 2 &= 3x^2 \\ \Leftrightarrow 6ax^2 + 4bx + 2a + 2c &= 3x^2\end{aligned}$$

となる。これは x についての恒等式だから、

$$\begin{cases} 6a = 3 \\ 4b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

であるから、

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + d$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}\int_{x-1}^{x+1} f(t) dt &= x^3 \\ \Leftrightarrow \int_{x-1}^{x+1} \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t + d \right) dt &= x^3 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{4}t^2 + dt \right]_{x-1}^{x+1} &= x^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{8} \{ (x+1)^4 - (x-1)^4 \} - \frac{1}{4} \{ (x+1)^2 - (x-1)^2 \} + d \{ (x+1) - (x-1) \} &= x^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{8} (8x^3 + 8x) - \frac{1}{4} \cdot 4x + d \cdot 2 &= x^3 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2d &= x^3 \\ \therefore d &= 0\end{aligned}$$

であるから、

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$$

となる。

$$\text{(答)} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$$

(3)

(1) で示した等式

$$\int_{x-1}^{x+2n-1} f(t) dt = \sum_{k=1}^n \{x+2(k-1)\}^3$$

において、 $x=1$ のとき、右辺が

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3$$

となるから、 $x=1$ のときの左辺を計算すればよい。したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 &= \int_{1-1}^{1+2n-1} f(t) dt \\ &= \int_0^{2n} \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^{2n} \\ &= 2n^4 - n^2\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 2n^4 - n^2$$