

平成 31 年度入学者選抜試験問題

工 学 部

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子の本文は、1 ページから 4 ページまでです。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 監督者の指示にしたがって、解答用紙に大学受験番号を正しく記入してください。
大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点されないことがあります。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 次の問いに答えよ。

(1) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ の和を求めよ。

(2) 複素数 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-27}$ の値を求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

(3) $\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{4}{3}$ および $m < n$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。

〔2〕 1 辺の長さが 1 の正三角形 OAB がある。辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P とし、実数 t に対して $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP}$ を満たす点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{2}{3}t - 1\right)\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + \left(\frac{t}{3} - 1\right)\overrightarrow{OB}$ を示せ。

(3) $S = |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{AQ}|^2 + |\overrightarrow{BQ}|^2$ とおく。

(i) S を t の式で表せ。

(ii) t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、 S の最小値と、そのときの t の値を求めよ。

〔3〕 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{17}{6}, 3a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 4 + \frac{1}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義し、数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n, c_n = b_n - \frac{1}{2^n} - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $3b_{n+1} - b_n$ を n の式で表せ。
- (2) 数列 $\{c_n\}$ が等比数列であることを示し、その一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

〔4〕 3 次関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して

$$\int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = x^3$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、以下で用いる n は自然数とする。

(1) $\int_{x-1}^{x+2n-1} f(t) dt = \sum_{k=1}^n \{x + 2(k-1)\}^3$ を示せ。

(2) (i) $f(x+1) - f(x-1) = 3x^2$ を示せ。

(ii) $f(x)$ を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3$ を n の式で表せ。

