

1. (配点 50) 整数 a, b, c, d, p, q は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & pq \end{pmatrix}$$

を満たすとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) a, b のうち少なくとも一方は偶数であることを示せ。

(2) $\sqrt{pq}$ は有理数であることを示せ。

(3) $p \geq 2$ かつ $q = 1$ となる行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の例を 1 つあげよ。

2. (配点50) 原点を O とする座標空間に 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 1)$, $C(1, 1, 2)$ をとり, 方程式 $z = -1$ で表される平面を α とする。 $t > 2$ とするとき, 点 $P(2, 1, t)$ を考える。4 つの直線 PO , PA , PB , PC と平面 α との交点をそれぞれ D , E , F , G とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{EG}$ を $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EF}$, t を用いて表せ。

(2) 点 G が $\triangle DEF$ の周または内部にあるように, t の値の範囲を定めよ。

3. (配点 50) 座標平面上に動点 P, Q があり, 独立に動く。各々の点は 1 秒ごとに, x 軸の正の向き, x 軸の負の向きおよび y 軸の正の向きのいずれかに 1 だけ進む。その確率は, x 軸の正の向きと負の向きにはそれぞれ $\frac{1}{4}$, y 軸の正の向きには $\frac{1}{2}$ である。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) はじめに動点 P, Q はともに原点にあるとする。1 秒後に P, Q が同じ位置にある確率を求めよ。
- (2) はじめに動点 P は原点に, 動点 Q は点 $(2, 0)$ にあるとする。3 秒後に P, Q が同じ位置にある確率を求めよ。

4. (配点 50) 関数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求め、 $f(x)$ の増減を調べて、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。(変曲点は求めなくてよい。)

(2) $f(x) = \frac{1}{2}$ となる x の値 a および微分係数 $f'(a)$ を求めよ。