

1. (配点 50) 整数 a, b, c, d, p, q は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & pq \end{pmatrix}$$

を満たすとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) a, b のうち少なくとも一方は偶数であることを示せ。

(2) $\sqrt{pq}$ は有理数であることを示せ。

(3) $p \geq 2$ かつ $q = 1$ となる行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の例を 1 つあげよ。

2. (配点 50) 関数 $f(x) = |x - a + 2| - 2|x - a - 1| + 1$ について, 次の問いに答えよ。ただし, a は定数とする。

(1) $a = 1$ のときの関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 3$ の範囲での最小値 $m(a)$ を a を用いて表せ。

3. (配点 50) 関数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求め、 $f(x)$ の増減を調べて、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。(変曲点は求めなくてよい。)

(2) $f(x) = \frac{1}{2}$ となる x の値 a および微分係数 $f'(a)$ を求めよ。

4. (配点 50) e を自然対数の底とする。関数 $y = e^x$ のグラフの $x \geq 0$ の部分を C とし、関数 $y = (e - 2)x + 2$ のグラフを l とする。 C と l が点 $(1, e)$ のみで交わることに注意して、 y 軸と C および l とで囲まれる部分を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ。