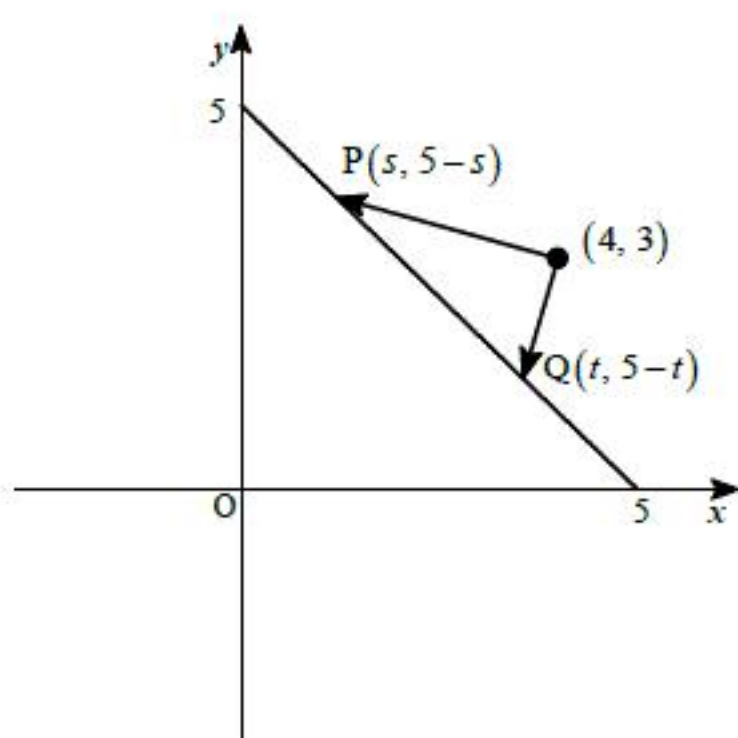


【1】

(1)



$$\begin{aligned}\overline{CP} &= \overline{OP} - \overline{OC} \\ &= (s-4, 2-s) \\ \overline{CQ} &= \overline{OQ} - \overline{OC} \\ &= (t-4, 2-t)\end{aligned}$$

であり、ベクトル $\overline{CP}$ と $\overline{CQ}$ が直交するので、

$$\begin{aligned}\overline{CP} \cdot \overline{CQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s-4)(t-4) + (2-s)(2-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow st - 4s - 4t + 16 + 4 - 2s - 2t + st &= 0 \\ \Leftrightarrow st - 3s - 3t + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s-3)t &= 3s - 10 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と変形できる。上式は $s=3$ のときにこの等式は成り立たないので、

$$s \neq 3$$

である。したがって、 $\textcircled{1}$ の両辺を $s-3$ で割ると、

$$\therefore t = \frac{3s-10}{s-3}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{3s-10}{s-3}$$

(2)

$0 \leq t \leq 5$ より、

$$0 \leq \frac{3s-10}{s-3} \leq 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。したがって、 s の値で場合分けをして、 $0 \leq s \leq 5$ と $\textcircled{2}$ を満たす s の範囲を求める。

[1] $0 \leq s < 3$ のとき、

$$s-3 < 0$$

であるから、

$$\begin{aligned}\textcircled{2} &\Leftrightarrow 5(s-3) \leq 3s-10 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow s \leq \frac{10}{3}, s \leq \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow s \leq \frac{5}{2} \\ \therefore 0 \leq s &\leq \frac{5}{2} \quad (\because 0 \leq s < 3)\end{aligned}$$

となる。

[2] $3 < s \leq 5$ のとき、

$$s-3 > 0$$

であるから、

$$\begin{aligned}\textcircled{2} &\Leftrightarrow 0 \leq 3s-10 \leq 5(s-3) \\ &\Leftrightarrow s \geq \frac{10}{3}, s \geq \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow s \geq \frac{10}{3} \\ \therefore \frac{10}{3} &\leq s \leq 5 \quad (\because 3 < s \leq 5)\end{aligned}$$

となる。

[1], [2] より、 s の取りうる範囲は、

$$0 \leq s \leq \frac{5}{2}, \frac{10}{3} \leq s \leq 5$$

である。

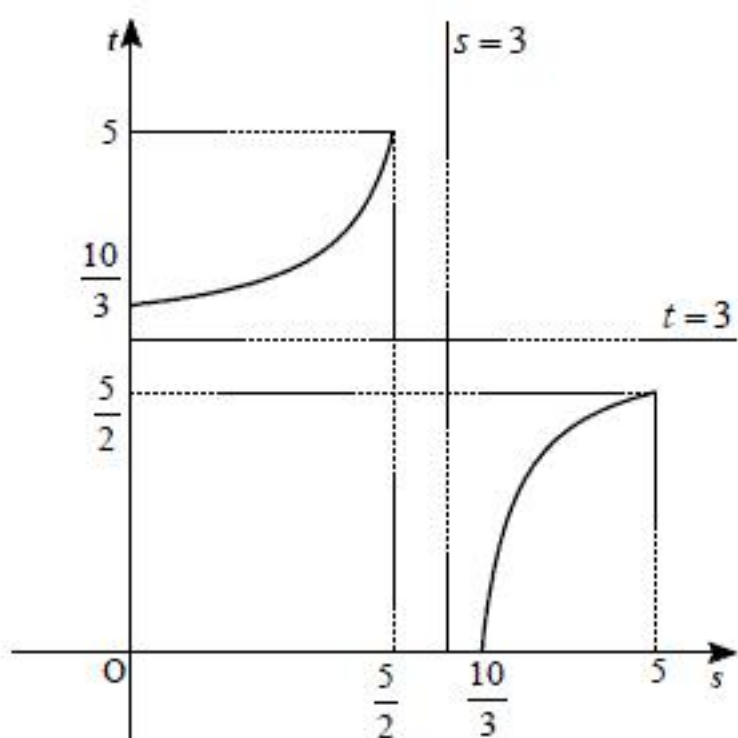
$$(\text{答}) \quad 0 \leq s \leq \frac{5}{2}, \frac{10}{3} \leq s \leq 5$$

(3)

(1) より、

$$t = \frac{3s-10}{s-3} = 3 - \frac{1}{s-3}$$

と変形できる。さらに s が (2) の範囲を動くことを考えると、グラフは下記の通りである。



(答) 前図

〔2〕

(1)

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 2t + (\sin t \cos 2t)^2} \\
 &= \sqrt{(1 - \sin^2 t) + 4\sin^2 t \cos^2 t + \sin^2 t (1 - 2\sin^2 t)^2} \\
 &= \sqrt{1 - \sin^2 t + 4\sin^2 t (1 - \sin^2 t) + \sin^2 t (1 - 2\sin^2 t)^2} \\
 &= \sqrt{1 - X + 4X - 4X^2 + X - 4X^2 + 4X^3} \\
 &= \sqrt{4X^3 - 8X^2 + 4X + 1}
 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OP} = \sqrt{4X^3 - 8X^2 + 4X + 1}$$

(2)

t はすべての実数をとるので、 $X = \sin^2 t$ は

$$0 \leq X \leq 1$$

のすべての実数を取りうる。よって、

$$f(X) = 4X^3 - 8X^2 + 4X + 1 \quad (0 \leq X \leq 1)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
 f'(X) &= 12X^2 - 16X + 4 \\
 &= 4(X-1)(3X-1)
 \end{aligned}$$

となるので、 $f(X)$ の増減表は下記の通りである。

X	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(X)$		+	0	-	
$f(X)$		↗		↘	

ゆえに、 $\overline{OP}$ が最大となるのは、 $X = \frac{1}{3}$ のときで、その値は、

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 1} \\
 &= \sqrt{\frac{43}{27}} \\
 &= \frac{\sqrt{129}}{9}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{129}}{9}$$

[3]

(1)

行列 A は逆行列を持たないので,

$$|A| = 2a + f(b) = 0$$

$$\therefore f(b) = -2a$$

が成り立つ。よって,

$$A = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。ケーリーハミルトンの定理より、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば,

$$A^2 - (2+a)A = O$$

$$\Leftrightarrow A^2 = (2+a)A$$

$$\therefore A^n = (a+2)A^{n-1} = (a+2)^{n-1} \begin{pmatrix} a & -2a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad A^n = (a+2)^{n-1} \begin{pmatrix} a & -2a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$n \rightarrow \infty$ のとき、 A^n のすべての成分が 0 に収束するためには,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a+2)^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow |a+2| < 1$$

$$\Leftrightarrow -3 < a < -1$$

となればよい。このとき、 $f(b) = -2a$ であるから,

$$2 < f(b) < 6$$

が A の各成分が 0 に収束するための必要十分条件である。

$$\begin{aligned} f(b) - 2 &= b^3 - 3b^2 - 2b + 4 \\ &= (b-1)(b^2 - 2b - 4) \\ &= (b-1)\{b - (1+\sqrt{5})\}\{b - (1-\sqrt{5})\} \end{aligned}$$

であるから,

$$2 < f(b)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} < b < 1, 1 + \sqrt{5} < b \quad \dots \textcircled{1}$$

であり,

$$\begin{aligned} f(b) - 6 &= b^3 - 3b^2 - 2b \\ &= b \left(b - \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right) \left(b - \frac{3-\sqrt{17}}{2} \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$f(b) < 6$$

$$\Leftrightarrow b < \frac{3-\sqrt{17}}{2}, 0 < b < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①, ②より、 A の各成分が 0 に収束するための必要十分条件は,

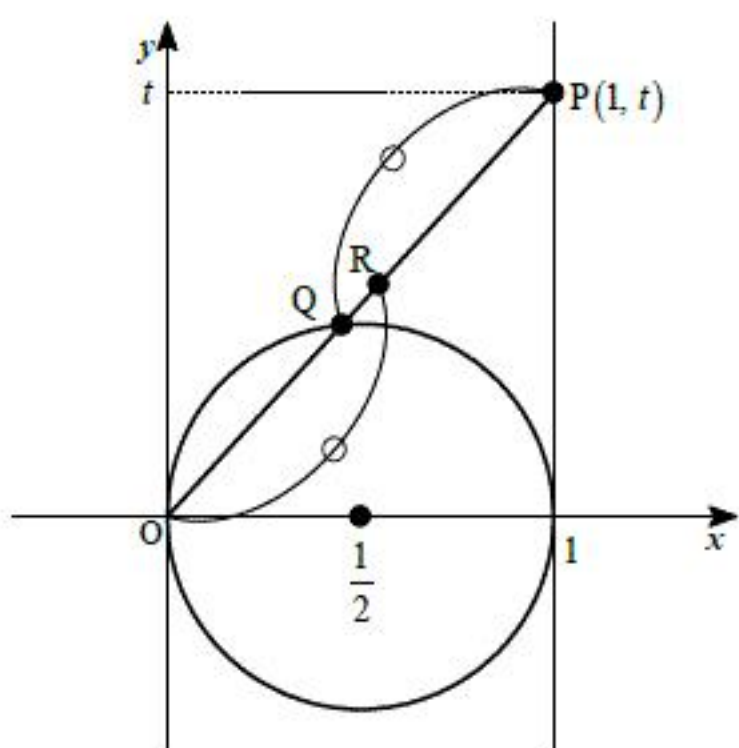
$$1 - \sqrt{5} < b < \frac{3-\sqrt{17}}{2}, 0 < b < 1, 1 + \sqrt{5} < b < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 - \sqrt{5} < b < \frac{3-\sqrt{17}}{2}, 0 < b < 1, 1 + \sqrt{5} < b < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

[4]

(1)



直線 OP の方程式は、

$$y = tx \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、円 S の方程式は、

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。点 Q は直線 OP と円 S の交点なので、①、②式を連立させて、

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + t^2 x^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow (t^2 + 1)x^2 - x &= 0 \\ \therefore x &= 0, \frac{1}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

となるが、点 Q は O とは一致しないので、点 Q の x 座標は、

$$\frac{1}{t^2 + 1}$$

であるので、①より、

$$Q\left(\frac{1}{t^2 + 1}, \frac{t}{t^2 + 1}\right)$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)^2 + \left(t - \frac{t}{t^2 + 1}\right)^2} \\ &= \sqrt{(1 + t^2)\left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)^2} \\ &= \sqrt{(1 + t^2)\left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{t^4}{1 + t^2}} \\ &= \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \end{aligned}$$

と計算でき、 $\overline{OR} = \overline{PQ}$ より、

$$\overline{OR} = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OR} = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}}$$

(2)

点 R は線分 OP 上にあるので、実数 s を用いて、

$$R(s, st) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

とおける。これと(1)より、

$$\begin{aligned} \overline{OR} &= \sqrt{s^2 + s^2 t^2} = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \\ \Leftrightarrow s\sqrt{1 + t^2} &= \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \quad (0 \leq s \leq 1) \\ \therefore s &= \frac{t^2}{1 + t^2} \quad (\because 1 + t^2 > 0) \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$R\left(\frac{t^2}{1 + t^2}, \frac{t^3}{1 + t^2}\right)$$

$$(\text{答}) \quad R\left(\frac{t^2}{1 + t^2}, \frac{t^3}{1 + t^2}\right)$$

(3)

(2)の答えより、点 R の軌跡は $y = tx$ とおける。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{1 + t^2} &= x \\ \Leftrightarrow t^2 &= (1 + t^2)x \\ \Leftrightarrow (1 - x)t^2 &= x \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{x}{1 - x} \end{aligned}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{x}{1 - x}} \quad (\because t \geq 0)$$

と表せる。 t が 0 以上のすべての実数をとるとき、 x は、 $0 \leq x < 1$ のすべての実数値をとる。

したがって、点 R の軌跡は、

$$y = x\sqrt{\frac{x}{1 - x}} \quad (0 \leq x < 1)$$

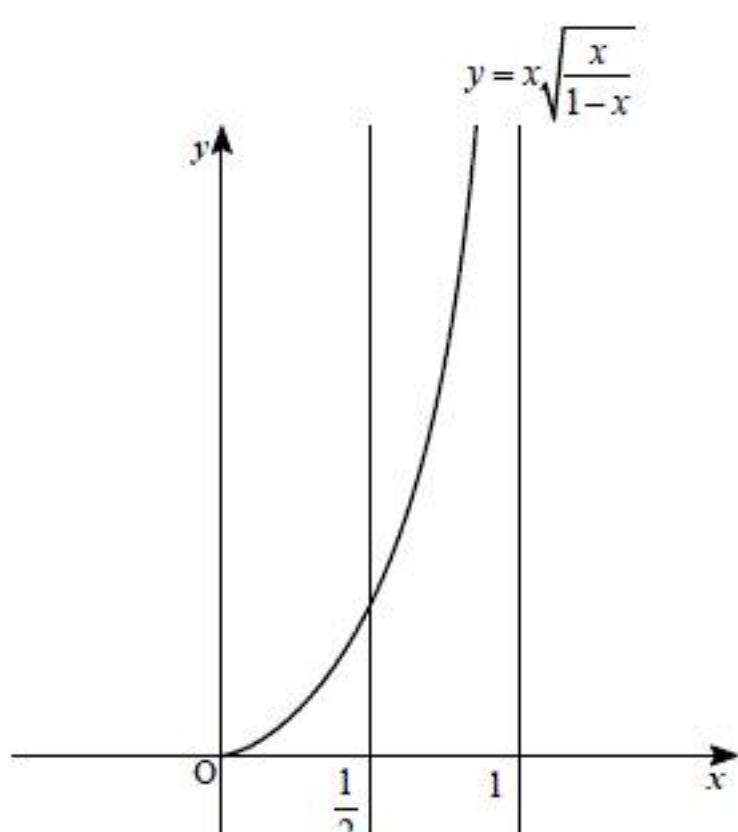
である。

$$y' = \frac{\frac{1}{2}x^2(3 - 2x)}{2(1 - x)^{\frac{3}{2}}}$$

より、 y の増減表は下記の通りである。

x	0	...	1
y'	0	+	/
y	0	/	/

したがって、点 R の軌跡の概形は次の通りである。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\frac{1}{2}} y^2 dx &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{1 - x} dx \\ &= -\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x - 1}\right) dx \\ &= -\pi \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x - 1|\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \pi \left(\log 2 - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi \left(\log 2 - \frac{2}{3}\right)$$