

〔1〕

(1)

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 2t + (\sin t \cos 2t)^2} \\
 &= \sqrt{(1 - \sin^2 t) + 4\sin^2 t \cos^2 t + \sin^2 t (1 - 2\sin^2 t)^2} \\
 &= \sqrt{1 - \sin^2 t + 4\sin^2 t (1 - \sin^2 t) + \sin^2 t (1 - 2\sin^2 t)^2} \\
 &= \sqrt{1 - X + 4X - 4X^2 + X - 4X^2 + 4X^3} \\
 &= \sqrt{4X^3 - 8X^2 + 4X + 1}
 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OP} = \sqrt{4X^3 - 8X^2 + 4X + 1}$$

(2)

t はすべての実数をとるので、 $X = \sin^2 t$ は

$$0 \leq X \leq 1$$

のすべての実数を取りうる。よって、

$$f(X) = 4X^3 - 8X^2 + 4X + 1 \quad (0 \leq X \leq 1)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
 f'(X) &= 12X^2 - 16X + 4 \\
 &= 4(X-1)(3X-1)
 \end{aligned}$$

となるので、 $f(X)$ の増減表は下記の通りである。

X	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(X)$		+	0	-	
$f(X)$		↗		↘	

ゆえに、 $\overline{OP}$ が最大となるのは、 $X = \frac{1}{3}$ のときで、その値は、

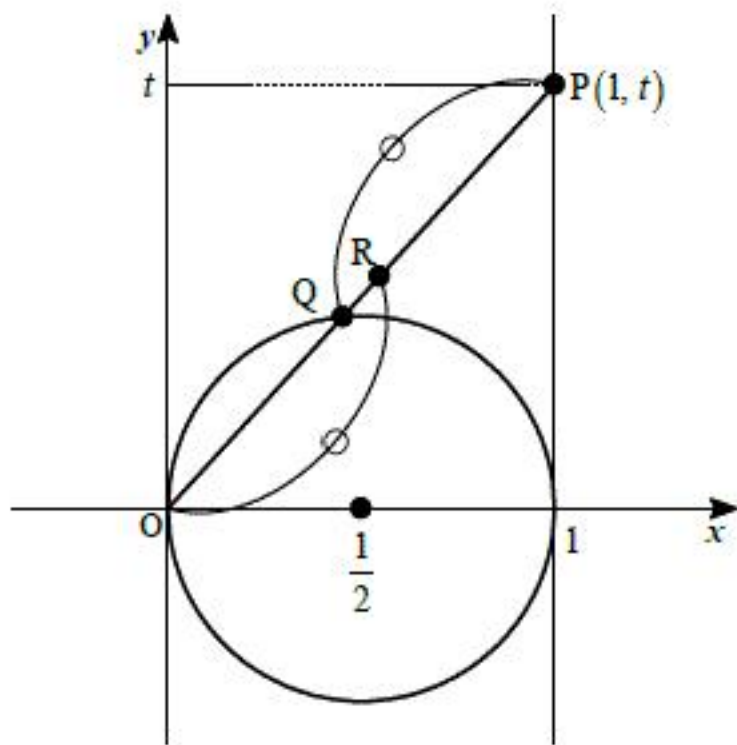
$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 1} \\
 &= \sqrt{\frac{43}{27}} \\
 &= \frac{\sqrt{129}}{9}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{129}}{9}$$

[2]

(1)



直線 OP の方程式は、

$$y = tx \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、円 S の方程式は、

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。点 Q は直線 OP と円 S の交点なので、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 式を連立させて、

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + t^2 x^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow (t^2 + 1)x^2 - x &= 0 \\ \therefore x &= 0, \frac{1}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

となるが、点 Q は O とは一致しないので、点 Q の x 座標は、

$$\frac{1}{t^2 + 1}$$

であるので、 $\textcircled{1}$ より、

$$Q\left(\frac{1}{t^2 + 1}, \frac{t}{t^2 + 1}\right)$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)^2 + \left(t - \frac{t}{t^2 + 1}\right)^2} \\ &= \sqrt{(1 + t^2)\left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)^2} \\ &= \sqrt{(1 + t^2)\left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{t^4}}{\sqrt{1 + t^2}} \\ &= \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \end{aligned}$$

と計算でき、 $\overline{OR} = \overline{PQ}$ より、

$$\overline{OR} = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OR} = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}}$$

(2)

点 R は線分 OP 上にあるので、実数 s を用いて、

$$R(s, st) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

とおける。これと(1)より、

$$\begin{aligned} \overline{OR} &= \sqrt{s^2 + s^2 t^2} = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \\ \Leftrightarrow s\sqrt{1 + t^2} &= \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \quad (0 \leq s \leq 1) \\ \therefore s &= \frac{t^2}{1 + t^2} \quad (\because 1 + t^2 > 0) \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$R\left(\frac{t^2}{1 + t^2}, \frac{t^3}{1 + t^2}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad R\left(\frac{t^2}{1 + t^2}, \frac{t^3}{1 + t^2}\right)$$

(3)

(2)の答えより、点 R の軌跡は $y = tx$ とおける。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{1 + t^2} &= x \\ \Leftrightarrow t^2 &= (1 + t^2)x \\ \Leftrightarrow (1 - x)t^2 &= x \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{x}{1 - x} \end{aligned}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{x}{1 - x}} \quad (\because t \geq 0)$$

と表せる。 t が 0 以上のすべての実数をとるとき、 x は、 $0 \leq x < 1$ のすべての実数値をとる。

したがって、点 R の軌跡は、

$$y = x\sqrt{\frac{x}{1 - x}} \quad (0 \leq x < 1)$$

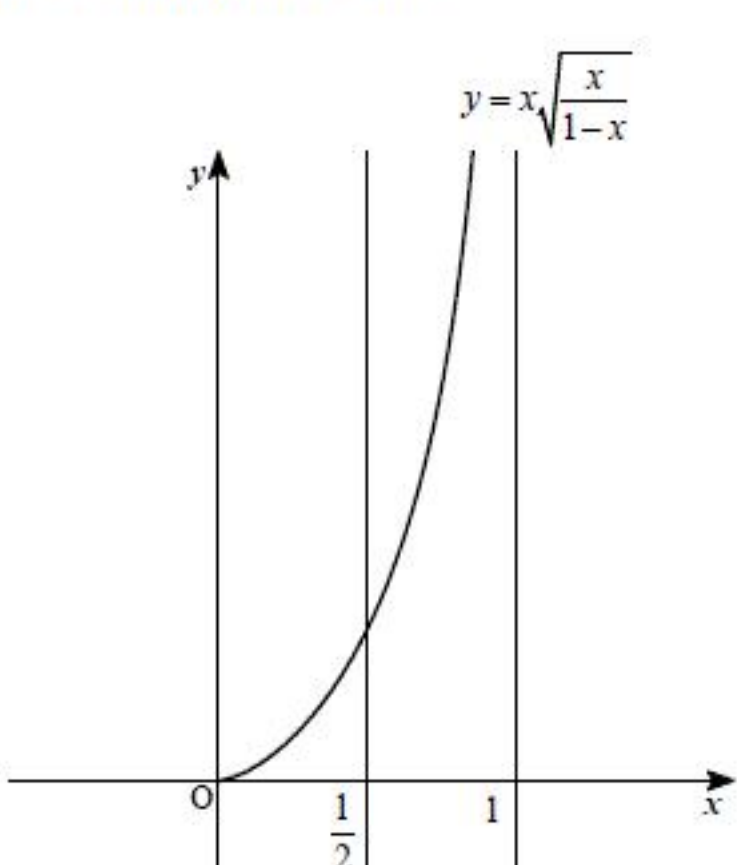
である。

$$y' = \frac{\frac{1}{2}x^2(3 - 2x)}{2(1 - x)^{\frac{3}{2}}}$$

より、 y の増減表は下記の通りである。

x	0	...	1
y'	0	+	/
y	0	/	/

したがって、点 R の軌跡の概形は次の通りである。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\frac{1}{2}} y^2 dx &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{1 - x} dx \\ &= -\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x - 1}\right) dx \\ &= -\pi \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x - 1|\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \pi \left(\log 2 - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi \left(\log 2 - \frac{2}{3}\right)$$

[3]

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{とおくと,}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

より, A は原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ 移動する回転行列である。よって, $n=1, 2, 3$ に対して,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{6} & -\sin \frac{n\pi}{6} \\ \sin \frac{n\pi}{6} & \cos \frac{n\pi}{6} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。特に $n=12m$ のとき,

$$A^n = E \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \overline{p_n}$ とおくと,

$$\overline{p_{n+1}} = A \overline{p_n} \quad (n=1, 2, \dots), \quad \overline{p_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より,

$$\overline{p_n} = A^{n-1} \overline{p_1} \quad (n=1, 2, \dots) \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。よって, ③より,

$$\begin{aligned} \overline{p_{100}} &= A^{99} \overline{p_1} \\ &= A^{12 \cdot 8} \cdot A^3 \overline{p_1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できるので,

$$(a_{100}, b_{100}) = (-1, 2)$$

となる。

(答) $(a_{100}, b_{100}) = (-1, 2)$

(2)

①より,

$$A^6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

であるから,

$$\begin{aligned} A + A^2 + \dots + A^{12} &= (A + A^2 + \dots + A^6) + A^6 (A + A^2 + \dots + A^6) \\ &= (E - E)(A + A^2 + \dots + A^6) \\ &= O \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} \overline{p_k} &= \left(\sum_{k=1}^{100} A^{k-1} \right) \overline{p_1} \\ &= \{ E + (E + A^{12} + \dots + A^{84})(A + A^2 + \dots + A^{12}) + A^{97} + A^{98} + A^{99} \} \overline{p_1} \\ &= \{ E + A^{96} (A + A^2 + A^3) \} \overline{p_1} \\ &= (E + A + A^2 + A^3) \overline{p_1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} & -\frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \overline{p_1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{9+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できるので,

$$\left(\sum_{k=1}^{100} a_k, \sum_{k=1}^{100} b_k \right) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{9+3\sqrt{3}}{2} \right)$$

と求まる。

(答) $\left(\sum_{k=1}^{100} a_k, \sum_{k=1}^{100} b_k \right) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{9+3\sqrt{3}}{2} \right)$

[4]

(1)

点Pが+4にいるためには、硬貨を投げて表が7回、裏が3回出ればよい。したがって、求める確率は、

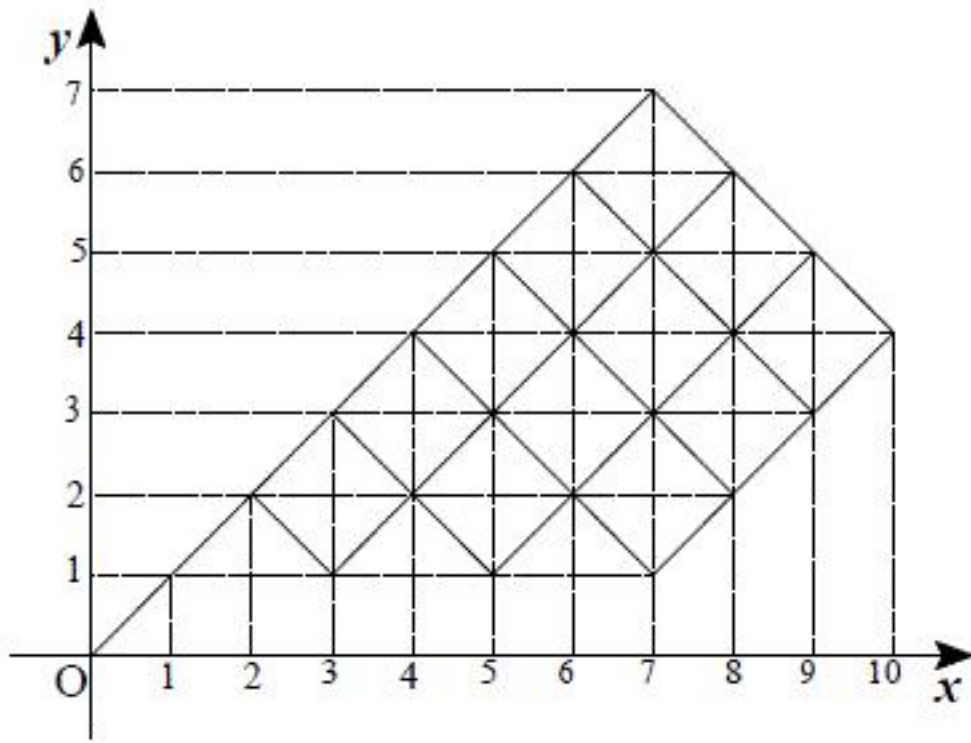
$${}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{128}$$

である。

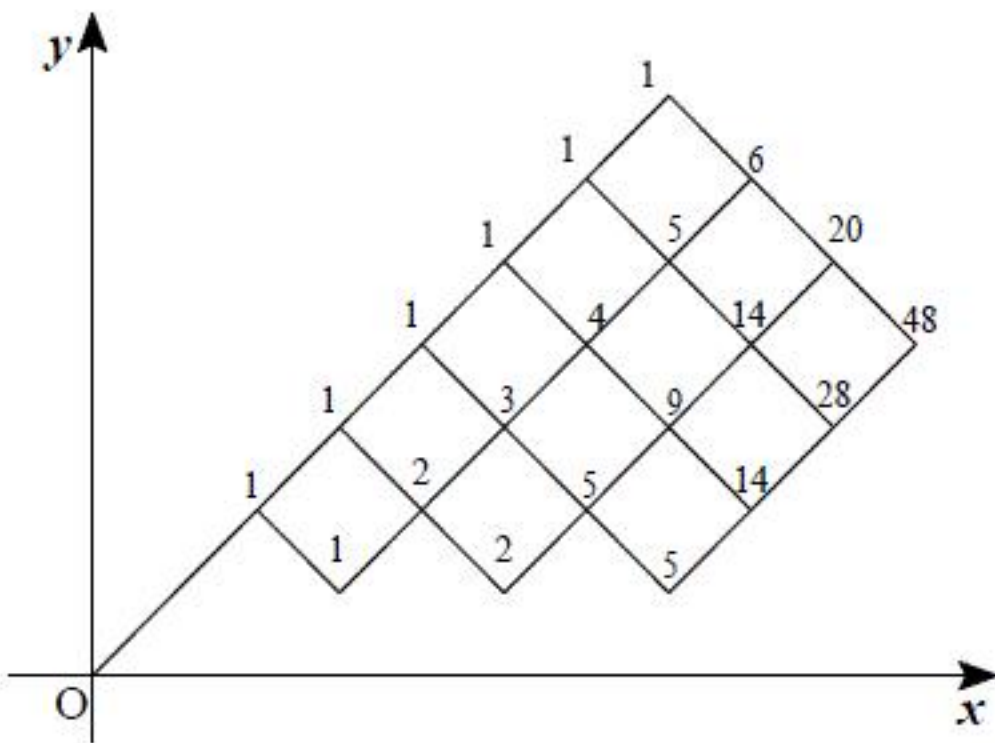
(答) $\frac{15}{128}$

(2)

点Pの状態を(試行回数, 数直線上の座標) = (x, y) で表すと、求める確率は点Pの状態が次図の $(0, 0)$ から実線部上を動き $(10, 4)$ に到達するような動き方となる確率である。



ここで、条件を満たす動き方のうち、各点を通るものの数を書き入ると次図のようになる。



前図より、条件を満たす動き方は48通りであり、これらはどれも確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ で起こるので、

求める確率は、

$$\frac{48}{2^{10}} = \frac{3}{64}$$

である。

(答) $\frac{3}{64}$