

[1]

${}_n C_n$ は

$${}_n C_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}(2n)! &= 2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \\ &= 2n \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2 \times (2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1 \\ &= 2n \times 2(n-1) \times \cdots \times (2 \cdot 2) \times (2 \cdot 1) \times (2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1 \\ &= 2^n \times n! \times (2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1\end{aligned}$$

と変形できることに注意すると、

$$\begin{aligned}{}_n C_n &= \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= 2^n \times \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{n!} \\ &= 2^n \times \frac{(2n-1)\{2(n-1)-1\}\{2(n-2)-1\} \cdots (2 \cdot 2-1)(2 \cdot 1-1)}{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= 2^n \times \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n-1}\right) \left(2 - \frac{1}{n-2}\right) \cdots \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(2 - \frac{1}{1}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $1 \leq k \leq n$ をみたすすべての自然数 k について、

$$1 \leq 2 - \frac{1}{k} \leq 2$$

が成立するから、

$$1 \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n-1}\right) \left(2 - \frac{1}{n-2}\right) \cdots \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(2 - \frac{1}{1}\right) \leq 2^n$$

が言える。したがって、

$$2^n \leq {}_n C_n \leq 4^n$$

が成り立つ。

(証明終)

〔2〕

(1)

1日に曲 A, Bが両方とも放送される確率は,

$$\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{10}$$

(2)

n 日間, 曲 C, D, Eの3曲が選ばれ続ければいいから, n 日間で曲の A, Bいずれも全く放送されない確率は

$$\left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n = \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

(3)

n 日間で曲 Aが少なくとも1度は放送される確率は, 余事象を考えると, 全体の確率から n 日間で曲 Aが全く放送されない確率を引けばいいから,

$$1 - \left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n = 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

〔3〕

(1)

k を実数として $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PB} &= 1 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) &= 1 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - k|\overrightarrow{OA}|^2 &= 1\end{aligned}$$

となる。一方、1辺の長さが2より

$$|\overrightarrow{OA}| = 2$$

である。また、正三角形 OAB を考えると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 2\end{aligned}$$

である。従って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - k|\overrightarrow{OA}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2 - 4k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ とわかる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$$

(2)

l を実数として $\overrightarrow{PQ} = l\overrightarrow{PB}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{PB} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + l\left(\overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right) \\ &= \frac{1-l}{4}\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となる。このとき、 PB と CQ は垂直より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-2l}{4}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1-l}{16}|\overrightarrow{OA}|^2 + l|\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{13}{4}l - \frac{5}{4} &= 0 \\ \therefore l &= \frac{5}{13}\end{aligned}$$

となる。よって、 $PB:PQ=13:5$ である。

$$(\text{答}) \quad PB:PQ=13:5$$

〔4〕

(1)

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

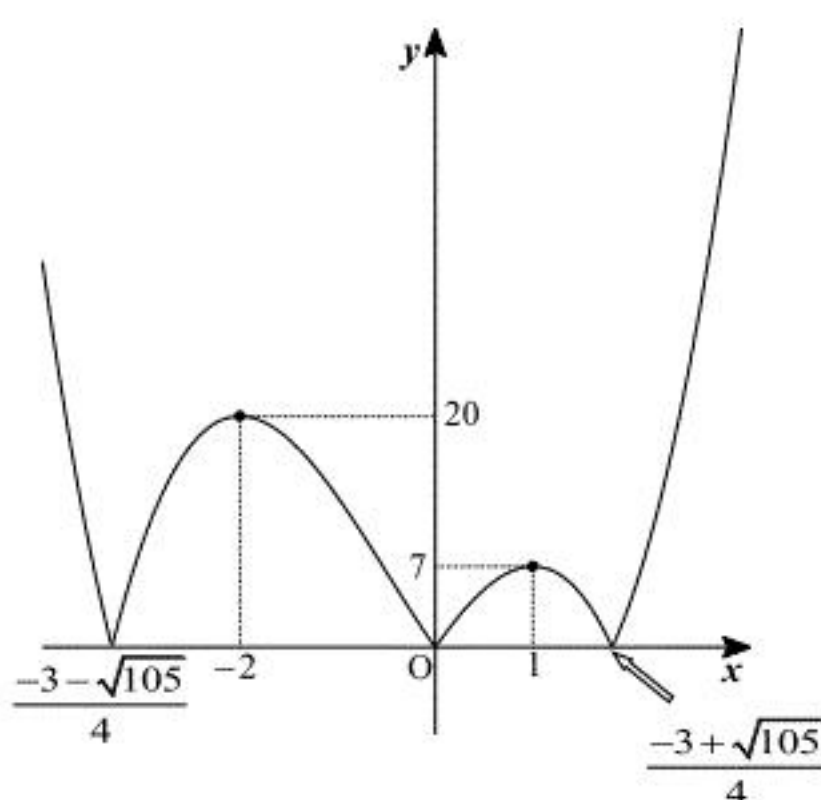
となる。よって、 $x = -2, 1$ のときに $f'(x) = 0$ となるから、増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

また、

$$f(x) = x(2x^2 + 3x - 12)$$

より、 $f(x) = 0$ となるのは、 $x = 0, \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$ のときである。以上より、求めるグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned} g(a) &= a^2 + 3a + 2 \\ &= (a+1)(a+2) \end{aligned}$$

とおいたとき、方程式の異なる実数解の個数を $y = |f(x)|$ と $y = g(a)$ との交点の個数から求める。

[1] $g(a) < 0$ のとき

このとき、 $-2 < a < -1$ であり、実数解は 0 個である。

[2] $g(a) = 0$ のとき

このとき、 $a = -2, -1$ であり、実数解は 3 個である。

[3] $0 < g(a) < 7$ のとき

このとき、 $\frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < a < -2, -1 < a < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$ であり、実数解は 6 個である。

[4] $g(a) = 7$ のとき

このとき、 $a = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$ であり、実数解は 5 個である。

[5] $7 < g(a) < 20$ のとき

このとき、 $-6 < a < \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} < a < 3$ であり、実数解は 4 個である。

[6] $g(a) = 20$ のとき

このとき、 $a = -6, 3$ であり、実数解は 3 個である。

[7] $g(a) > 20$ のとき

このとき、 $a < -6, 3 < a$ であり、実数解は 2 個である。

以上、[1] から [7] より、下のようになる。

{	$-2 < a < -1$	のとき	0 個
	$a < -6, 3 < a$	のとき	2 個
	$a = -6, -2, -1, 3$	のとき	3 個
	$-6 < a < \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} < a < 3$	のとき	4 個
	$a = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$	のとき	5 個
	$\frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < a < -2, -1 < a < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$	のとき	6 個

(答) {	$-2 < a < -1$	のとき	0 個
	$a < -6, 3 < a$	のとき	2 個
	$a = -6, -2, -1, 3$	のとき	3 個
	$-6 < a < \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} < a < 3$	のとき	4 個
	$a = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$	のとき	5 個
	$\frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < a < -2, -1 < a < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$	のとき	6 個