

〔1〕

(1)

 $f(x) = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ について,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + x \frac{\frac{1}{2\sqrt{a+x}} \cdot \sqrt{a-x} - \sqrt{a+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot (-1)}{(\sqrt{a-x})^2} \\ &= \frac{-x^2 + ax + a^2}{(a-x)\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

より, $f'(x) = 0$ を満たす x の値は, $a > 0$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 + ax + a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{(1 \pm \sqrt{5})a}{2} \end{aligned}$$

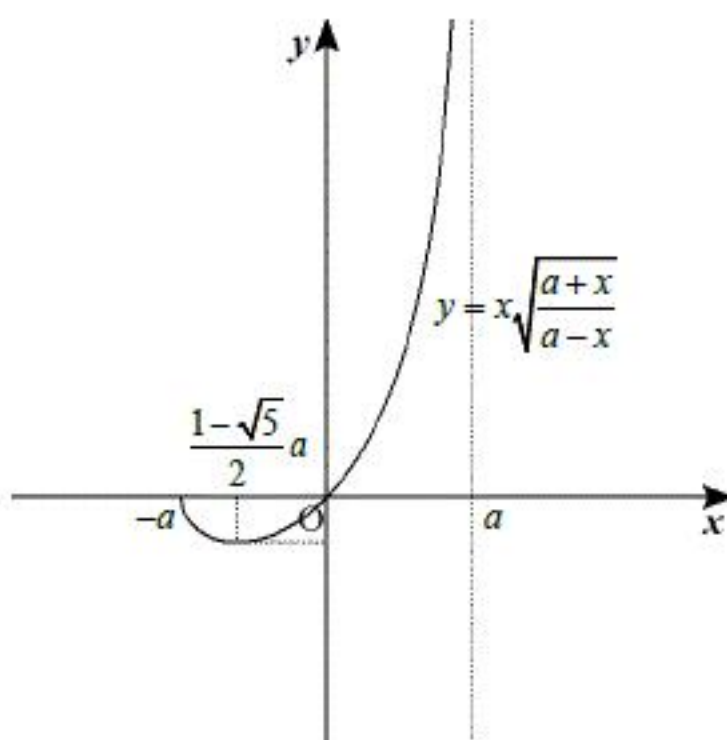
となる。 $-a \leq x < a$ より, $y = f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}a$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\diagdown \diagup$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\diagdown \diagup$

したがって, 極大値は存在せず, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}a$ のとき極小値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}a\right) &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}a \sqrt{\frac{a + \frac{1-\sqrt{5}}{2}a}{a - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a}} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}a \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} \\ &= \frac{(1-\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}a \end{aligned}$$

をとる。以上より, グラフは以下のようになる。



(答) 前図

(2)

求めるべき体積は

$$\int_{-a}^0 \pi \left(x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \right)^2 dx = \pi \int_{-a}^0 x^2 \left(\frac{a+x}{a-x} \right) dx$$

となる。ここで,

$$\frac{x^2(a+x)}{a-x} = -x^2 - 2ax - 2a^2 + \frac{2a^3}{a-x}$$

より,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \left(-x^2 - 2ax - 2a^2 + \frac{2a^3}{a-x} \right) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} - ax^2 - 2a^2x - 2a^3 \log|a-x| \right]_{-a}^0 \\ &= (-2a^3 \log a) - \left(\frac{a^3}{3} - a^3 + 2a^3 - 2a^3 \log 2a \right) \\ &= 2a^3 \left(\log 2 - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

となるから, 答えは

$$2a^3 \pi \left(\log 2 - \frac{2}{3} \right)$$

となる。

(答) $2a^3 \pi \left(\log 2 - \frac{2}{3} \right)$

〔2〕

(1)

1日に曲 A, B が両方とも放送される確率は,

$$\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{10}$$

(2)

n 日間、曲 C, D, E の3曲が選ばれ続けられればいから、 n 日間で曲 A, B のいずれも全く放送されない確率は

$$\left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n = \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

(3)

n 日間で曲 A が少なくとも1度は放送される確率は、全体の確率から n 日間で曲 A が全く放送されない確率を引けばいいから、

$$1 - \left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n = 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

(4)

$n=1$ のとき、 n 日間でどの曲も少なくとも1度は放送される確率は0である。 $n \geq 2$ について考えると、 n 日間でどの曲も少なくとも1度は放送される確率は、全体の確率から n 日間放送されない曲が存在する確率を引いたものである。ここで、 n 日間放送されない曲が存在する確率について、以下のように場合分けを行う。

[1] n 日間放送されない曲が2曲存在するときの確率

このときの確率は、放送される3曲を選ぶ確率と(2)より、

$${}_5C_3 \times \left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n$$

となる。

[2] n 日間放送されない曲が1曲存在するときの確率

まず、放送される4曲を選ぶ確率は ${}_5C_4$ である。選んだ4曲を n 日間放送し続ける確率は

$$\left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n$$

であり、ここから、[1]と重複する確率を引く必要があるから、この時の確率は

$${}_5C_4 \times \left\{ \left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n - {}_4C_3 \times \left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n \right\}$$

となる。

以上、[1], [2]より、 $n \geq 2$ のとき、 n 日間でどの曲も少なくとも1度は放送される確率は、

$$1 - {}_5C_3 \times \left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n - {}_5C_4 \times \left\{ \left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n - {}_4C_3 \times \left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n \right\} = 1 - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

である。これは $n=1$ の場合を含むため、求める確率は

$$1 - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 1 - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

〔3〕

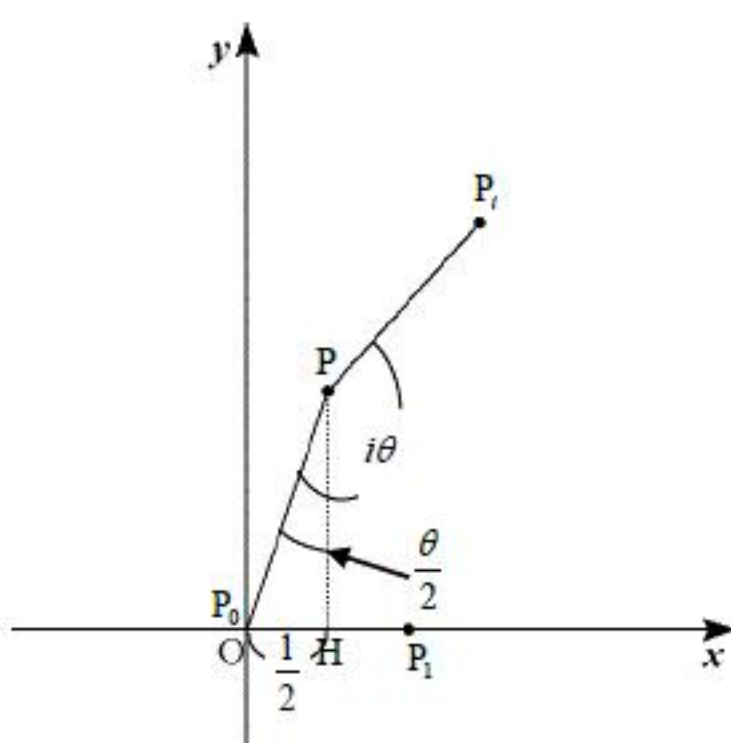
(1)

正 n 角形 $P_0P_1\cdots P_{n-1}$ の中心を P とおくと、 $\angle P_0PP_i = i\theta$ ($0 \leq i \leq n-1$) である。中心 P から x 軸に下した垂線の足を H とおくと、 $\triangle P_0HP$ に注目することで、中心 P から各頂点までの長さ

は $\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ であることがわかる。よって、頂点 P_i の座標は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_i} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_i} \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\tan\frac{\theta}{2}} \right) + \left(\frac{\sin\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, -\frac{\cos\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right)\end{aligned}$$

となる。



ℓ_i が x 軸正方向となす角は $i\theta$ である。従って、 ℓ_i の傾きを表す方向ベクトルは

$(\cos(i\theta), \sin(i\theta))$ より、 ℓ_i の方程式は

$$\cos(i\theta) \left(y - \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right) - \sin(i\theta) \left(x - \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right) = 0$$

となる。

$$\text{(答) } P_i \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\cos(i\theta) \left(y - \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right) - \sin(i\theta) \left(x - \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right) = 0$$

(2)

$\theta = \frac{2\pi}{n}$ より、 ℓ_i の傾きは $\tan\left(\frac{2i}{n}\pi\right)$ である。ここで、 $\ell_i \parallel \ell_j$ ($0 \leq i < j \leq n-1$) のとき、

$$\tan\left(\frac{2i}{n}\pi\right) = \tan\left(\frac{2j}{n}\pi\right)$$

より、

$$\begin{aligned}\frac{2j}{n}\pi &= \frac{2i}{n}\pi + \pi \\ \Leftrightarrow 2j &= 2i + n\end{aligned}$$

が成り立つ。 n が奇数のとき、 $2j = 2i + n$ を満たす整数の組 (i, j) は存在しない。よって、互いに平行な 2 辺は存在しない。

(証明終)

[4]

(1)

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

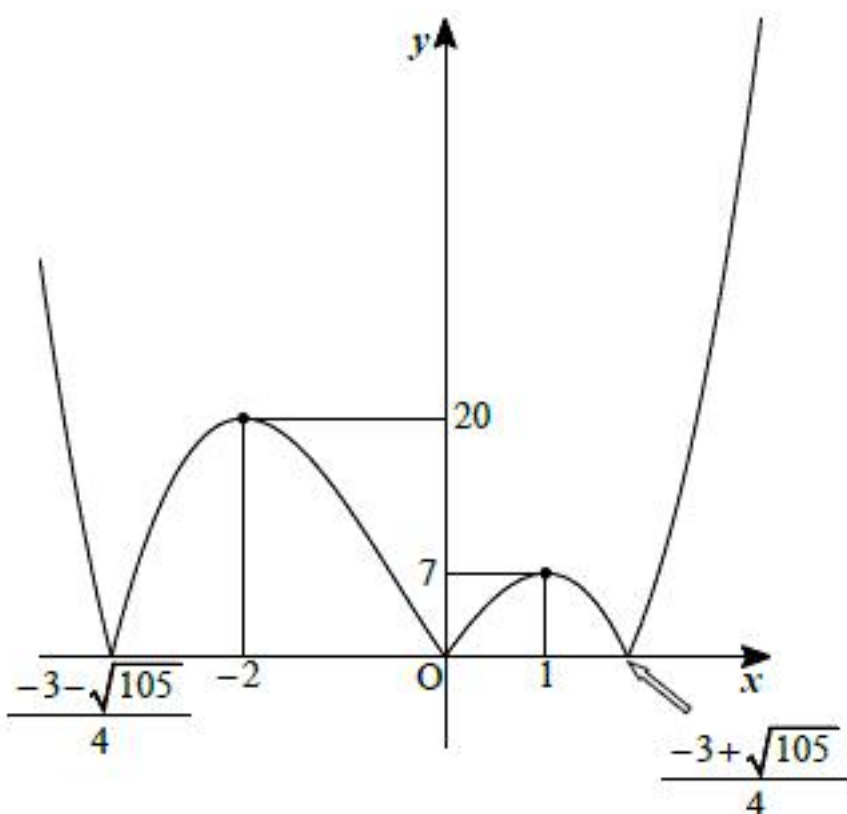
となる。よって、 $x = -2, 1$ のときに $f'(x) = 0$ となるから、増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

また、

$$f(x) = x(2x^2 + 3x - 12)$$

より、 $f(x) = 0$ となるのは、 $x = 0, \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$ のときである。以上より、求めるグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$$g(a) = a^2 + 3a + 2$$

とおいたとき、 $y = |f(x)|$ と $y = g(a)$ との交点の個数から求める。

[1] $g(a) < 0$ のとき

このとき、 $-2 < a < -1$ であり、実数解は 0 個である。

[2] $g(a) = 0$ のとき

このとき、 $a = -2, -1$ であり、実数解は 3 個である。

[3] $0 < g(a) < 7$ のとき

このとき、 $\frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < a < -2, -1 < a < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$ であり、実数解は 6 個である。

[4] $g(a) = 7$ のとき

このとき、 $a = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$ であり、実数解は 5 個である。

[5] $7 < g(a) < 20$ のとき

このとき、 $-6 < a < \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} < a < 3$ であり、実数解は 4 個である。

[6] $g(a) = 20$ のとき

このとき、 $a = -6, 3$ であり、実数解は 3 個である。

[7] $g(a) > 20$ のとき

このとき、 $a < -6, 3 < a$ であり、実数解は 2 個である。

以上、[1] から [7] より、下のようになる。

$-2 < a < -1$	のとき	0 個
$a = -6, -2, -1, 3$	のとき	3 個
$\frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < a < -2, -1 < a < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$	のとき	6 個
$a = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$	のとき	5 個
$-6 < a < \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} < a < 3$	のとき	4 個
$a < -6, 3 < a$	のとき	2 個

(答) 前表