

〔 1 〕

(1)

直線 ℓ の方程式を $y = mx + n$ (m, n は実数), 接点の x 座標を α, β とおくと,

$$\{x^4 - 2ax^3 + (a^2 - a - 1)x^2 + (a^2 + a + 1)x\} - (mx + n) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

が成り立つ。ここで,

$$(\text{右辺}) = x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2$$

より, 係数を比較すると,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a & \dots\dots ① \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = a^2 - a - 1 & \dots\dots ② \\ -2\alpha\beta(\alpha + \beta) = a^2 + a + 1 - m & \dots\dots ③ \\ \alpha^2\beta^2 = -n & \dots\dots ④ \end{cases}$$

となる。①と②より,

$$\alpha\beta = -\frac{a+1}{2}$$

であり, ③より,

$$\begin{aligned} m &= (a^2 + a + 1) + (-a^2 - a) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であり, ④より,

$$n = -\frac{(a+1)^2}{4}$$

である。以上から, 直線 ℓ の方程式は

$$y = x - \frac{(a+1)^2}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = x - \frac{(a+1)^2}{4}$$

(2)

(1)より, 曲線 C と直線 ℓ で囲まれる部分の面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} [\{x^4 - 2ax^3 + (a^2 - a - 1)x^2 + (a^2 + a + 1)x\} - (mx + n)] dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3(x - \beta)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{2}{3} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^3(x - \beta) dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^3(x - \beta) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}(x - \alpha)^4(x - \beta) \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{6} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^4 dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{30}(x - \alpha)^5 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{30}(\beta - \alpha)^5 \end{aligned}$$

となる。 $S = \frac{16}{15}$ より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{30}(\beta - \alpha)^5 &= \frac{16}{15} \\ \Leftrightarrow (\beta - \alpha)^5 &= 32 \\ \Leftrightarrow (\beta - \alpha)^2 &= 4 \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= a^2 + 2a + 2 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} a^2 + 2a + 2 &= 4 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a - 2 &= 0 \\ \therefore a &= -1 + \sqrt{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -1 + \sqrt{3}$$

〔2〕

(1)

1日に曲 A, B が両方とも放送される確率は,

$$\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{10}$$

(2)

n 日間、曲 C, D, E の3曲が選ばれ続けられればいから、 n 日間で曲 A, B のいずれも全く放送されない確率は

$$\left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n = \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

(3)

n 日間で曲 A が少なくとも1度は放送される確率は、全体の確率から n 日間で曲 A が全く放送されない確率を引けばいいから、

$$1 - \left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n = 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

(4)

$n=1$ のとき、 n 日間でどの曲も少なくとも1度は放送される確率は0である。 $n \geq 2$ について考えると、 n 日間でどの曲も少なくとも1度は放送される確率は、全体の確率から n 日間放送されない曲が存在する確率を引いたものである。ここで、 n 日間放送されない曲が存在する確率について、以下のように場合分けを行う。

[1] n 日間放送されない曲が2曲存在するときの確率

このときの確率は、放送される3曲を選ぶ確率と(2)より、

$${}_5C_3 \times \left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n$$

となる。

[2] n 日間放送されない曲が1曲存在するときの確率

まず、放送される4曲を選ぶ確率は ${}_5C_4$ である。選んだ4曲を n 日間放送し続ける確率は

$$\left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n \text{ であり、ここから、[1]と重複する確率を引く必要があるから、この時の確率は}$$

$${}_5C_4 \times \left\{ \left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n - {}_5C_3 \times \left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n \right\}$$

となる。

以上、[1], [2]より、 $n \geq 2$ のとき、 n 日間でどの曲も少なくとも1度は放送される確率は、

$$1 - {}_5C_3 \times \left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n - {}_5C_4 \times \left\{ \left(\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} \right)^n - {}_5C_3 \times \left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \right)^n \right\} = 1 - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

である。これは $n=1$ の場合を含むため、求める確率は

$$1 - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 1 - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

〔3〕

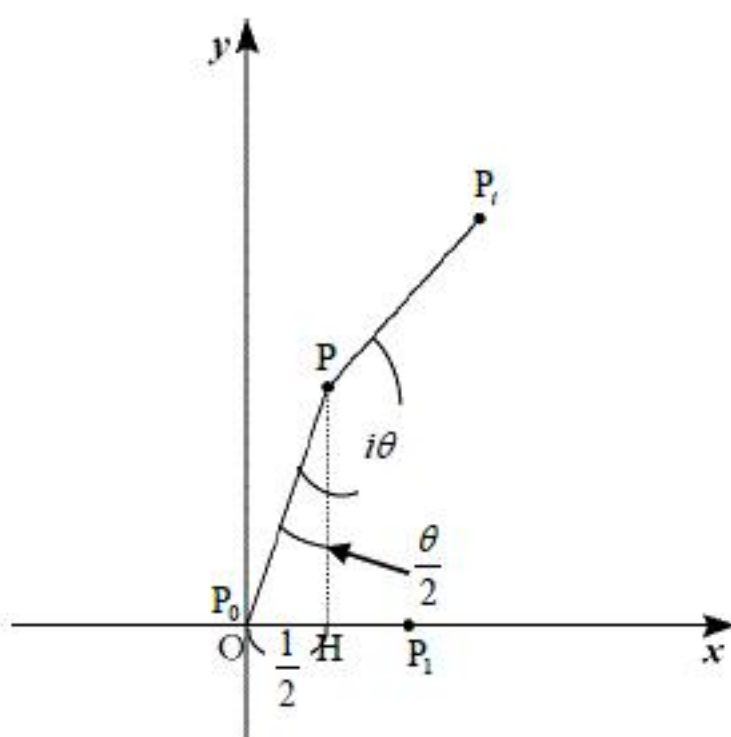
(1)

正 n 角形 $P_0P_1\cdots P_{n-1}$ の中心を P とおくと、 $\angle P_0PP_i = i\theta$ ($0 \leq i \leq n-1$) である。中心 P から x 軸に下した垂線の足を H とおくと、 $\triangle P_0HP$ に注目することで、中心 P から各頂点までの長さ

は $\frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$ であることがわかる。よって、頂点 P_i の座標は

$$\begin{aligned}\overline{OP_i} &= \overline{OP} + \overline{PP_i} \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \tan \frac{\theta}{2}} \right) + \left(\frac{\sin \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, -\frac{\cos \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right)\end{aligned}$$

となる。



ℓ_i が x 軸正方向となす角は $i\theta$ である。従って、 ℓ_i の傾きを表す方向ベクトルは

$(\cos(i\theta), \sin(i\theta))$ より、 ℓ_i の方程式は

$$\cos(i\theta) \left(y - \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right) - \sin(i\theta) \left(x - \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right) = 0$$

となる。

$$(\text{答}) P_i \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\cos(i\theta) \left(y - \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right) - \sin(i\theta) \left(x - \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin \left(i - \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right) = 0$$

(2)

$\theta = \frac{2\pi}{n}$ より、 ℓ_i の傾きは $\tan \left(\frac{2i}{n} \pi \right)$ である。ここで、 $\ell_i \parallel \ell_j$ ($0 \leq i < j \leq n-1$) のとき、

$$\tan \left(\frac{2i}{n} \pi \right) = \tan \left(\frac{2j}{n} \pi \right)$$

より、

$$\begin{aligned}\frac{2j}{n} \pi &= \frac{2i}{n} \pi + \pi \\ \Leftrightarrow 2j &= 2i + n\end{aligned}$$

が成り立つ。 n が奇数のとき、 $2j = 2i + n$ を満たす整数の組 (i, j) は存在しない。よって、互いに平行な 2 辺は存在しない。

(証明終)

〔4〕

(1)

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。よって、

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。また、このとき、

$$B^n = P(P^{-1}BP)^n P^{-1} \\ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & -2^n + 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & -2^n + 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

(2)

$$A_{n+2} - (B+C)A_{n+1} + BCA_n = 0$$

より、

$$A_{n+2} - CA_{n+1} = B(A_{n+1} - CA_n) \\ = \dots \\ = B^n(A_2 - CA_1)$$

となる。ここで、

$$A_2 - CA_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることから、

$$A_{n+2} - CA_{n+1} = B^n$$

である。よって、

$$A_{n+2} = CA_{n+1} + B^n \\ = C(CA_n + B^{n-1}) + B^n \\ = \dots \\ = C^n A_2 + C^{n-1}B + C^{n-2}B^2 + \dots + CB^{n-1} + B^n$$

$$\therefore A_{n+2} = C^{n+1} + \sum_{i=1}^n C^{n-i} B^i \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore A_n = C^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} C^{n-i-2} B^i \quad (n \geq 3)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A_n = C^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} C^{n-i-2} B^i \quad (n \geq 3)$$

(3)

$$C^{n-i} B^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2^i + 1 \\ 0 & 2^i \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & -2^i + 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

であるから、

$$A_{n+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & -2^i + 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & -\sum_{i=1}^n 2^i + n \\ 0 & n2^n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} n+1 & -2^{n+1} + n+2 \\ 0 & (n+2)2^n \end{pmatrix}$$

となる。したがって、 $n \geq 3$ のとき $n+2$ を n と置き換えて、

$$A_n = \begin{pmatrix} n-1 & -2^{n-1} + n \\ 0 & n2^{n-2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A_n = \begin{pmatrix} n-1 & -2^{n-1} + n \\ 0 & n2^{n-2} \end{pmatrix}$$