

[1]

(1)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \alpha a_n + \beta^n$$

より、順に代入して、

$$a_2 = \alpha a_1 + \beta$$

$$= \alpha + \beta$$

$$a_3 = \alpha(\alpha + \beta) + \beta$$

$$= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

$$a_4 = \alpha(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + \beta$$

$$= \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\text{答}) \quad a_2 = \alpha + \beta, \quad a_3 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \quad a_4 = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$$

(2)

(1)より

$$a_n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \cdots + \beta^{n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \beta^{k-1}$$

と推定できる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \beta^{k-1}$$

(3)

すべての自然数 n について

$$a_n = \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \beta^{k-1} \cdots (*)$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 = \alpha^0 \beta^0 = 1$$

となり、(*)成立。

(ii) $n=l$ ($l=1, 2, 3, \dots$) のとき (*) が成り立つと仮定すると、

$$a_l = \sum_{k=1}^l \alpha^{l-k} \beta^{k-1}$$

が成り立つ。

与えられた漸化式より、

$$\begin{aligned} a_{l+1} &= \alpha \sum_{k=1}^l \alpha^{l-k} \beta^{k-1} + \beta^l \\ &= \alpha(\alpha^{l-1} + \alpha^{l-2}\beta + \alpha^{l-3}\beta^2 + \cdots + \beta^{l-1}) + \beta^l \\ &= \alpha^l + \alpha^{l-1}\beta + \alpha^{l-2}\beta^2 + \cdots + \alpha\beta^{l-1} + \beta^l \\ &= \sum_{k=1}^{l+1} \alpha^{l+1-k} \beta^{k-1} \end{aligned}$$

となり、 $n=l+1$ のときも(*)が成り立つ。

(i), (ii) より、すべての自然数 n について

$$a_n = \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \beta^{k-1}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

〔2〕

(1)

(i) $x \geq 0$ のとき

$$x^2 = 2x + 1$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

 $x \geq 0$ より

$$x = 1 + \sqrt{2}$$

ゆえに、交点の座標は、 $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ (ii) $x < 0$ のとき

$$x^2 = -2x + 1$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

 $x < 0$ より

$$x = -1 - \sqrt{2}$$

ゆえに、交点の座標は、 $(-1 - \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ (答) $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}), (-1 - \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$

(2)

 C_1, C_2 は共に y 軸に対して対称なので、領域 A は y 軸で二等分される。ゆえに、 $x \geq 0$ を考えて、領域 A の面積を S とすると、

$$S = 2 \int_0^{1+\sqrt{2}} (2x + 1 - x^2) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2(5 + 4\sqrt{2})}{3}$$

$$= \frac{10 + 8\sqrt{2}}{3}$$

(答) $\frac{10 + 8\sqrt{2}}{3}$

(3)

実数 k を用いて、 $k = \frac{x}{2} + y$ とおくと、

$$y = -\frac{x}{2} + k \quad \cdots \textcircled{1}$$

この直線と領域 A の交点を考えて、・ k の最大値は①が次図の点 $P(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ を通るとき、

$$3 + 2\sqrt{2} = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2} + k$$

$$k = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{2}$$

・ k の最小値は①が $y = x^2$ と接するとき、

$$x^2 = -\frac{x}{2} + k$$

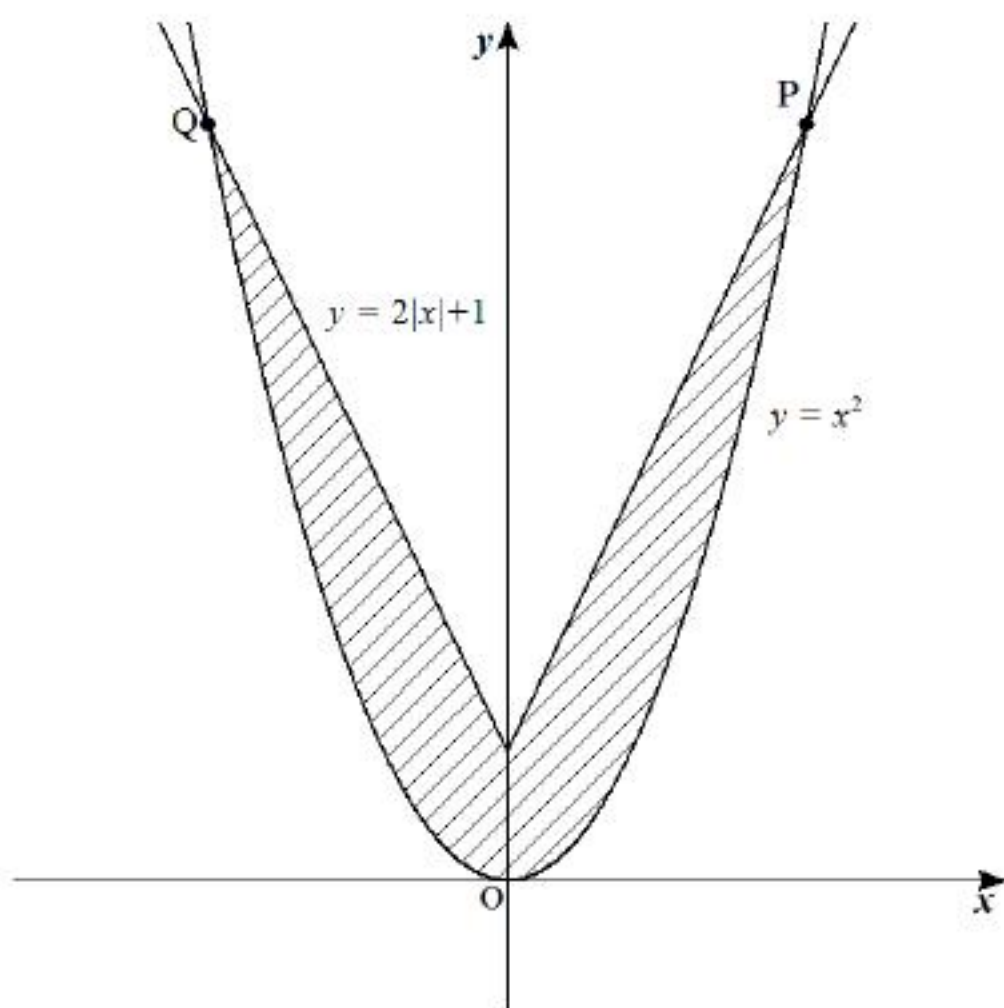
$$2x^2 + x - 2k = 0$$

の判別式を D とすると、

$$D = 1 + 16k$$

接する場合を考えるので、 $D = 0$ を考えて、

$$k = -\frac{1}{16}$$

(答) 最大値: $\frac{7 + 5\sqrt{2}}{2}$ 最小値: $-\frac{1}{16}$ 

[3]

- (1)
表が3回、裏が0~2回出て、最後に表が出ることから、
(i)裏が0回出た時

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- (ii)裏が1回出た時

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot {}_2C_1 = \frac{1}{4}$$

- (iii)裏が2回出た時

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot {}_3C_2 = \frac{3}{16}$$

以上から、求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

(答) $\frac{11}{16}$

- (2)
Aが負ける確率は、(1)より

$$1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$$

よって、求める期待値は、

$$1 \cdot \frac{11}{16} + (-0.5) \cdot \frac{5}{16} = \frac{17}{32}$$

(答) $\frac{17}{32}$

- (3)
期待値0なので

$$1 \cdot \frac{11}{16} + x \cdot \frac{5}{16} = 0$$

$$x = -2.2$$

(答) $x = -2.2$

[4]

(1)

m は自然数なので、すべての m について

$$m = 5n + k \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

を満たす (n, k) の組が存在する。

(i) $k = 0$ のとき

$$m^2 = 25n^2$$

したがって、このとき m^2 を 5 で割った余りは 0 となる。

(ii) $k = 1$ のとき

$$m^2 = (5n + 1)^2$$

$$= 25n^2 + 10n + 1$$

$$= 5(5n^2 + 2n) + 1$$

したがって、このとき m^2 を 5 で割った余りは 1 となる。

(iii) $k = 2$ のとき

$$m^2 = (5n + 2)^2$$

$$= 25n^2 + 20n + 4$$

$$= 5(5n^2 + 4n) + 4$$

したがって、このとき m^2 を 5 で割った余りは 4 となる。

(iv) $k = 3$ のとき

$$m^2 = (5n + 3)^2$$

$$= 25n^2 + 30n + 9$$

$$= 5(5n^2 + 6n + 1) + 4$$

したがって、このとき m^2 を 5 で割った余りは 4 となる。

(v) $k = 4$ のとき

$$m^2 = (5n + 4)^2$$

$$= 25n^2 + 40n + 16$$

$$= 5(5n^2 + 8n + 3) + 1$$

したがって、このとき m^2 を 5 で割った余りは 1 となる。

以上から、 m^2 を 5 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかになるため、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)より、「 m^2 が 5 の倍数」であることは、

$$k = 0$$

のときのみであり、このとき

$$m = 5n$$

となることがわかる。

よって m は 5 の倍数となり、題意は示された。

(証明終)

(3)

題意を背理法により示す。

$\sqrt{5}$ が有理数であると仮定すると、

$$\sqrt{5} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素な自然数。})$$

とおける。ここで両辺を二乗して、

$$5 = \frac{q^2}{p^2}$$

$$5p^2 = q^2 \quad \dots (\ast)$$

よって(2)より、 q は 5 の倍数なので $q = 5q'$ (q' は自然数。)と書ける。

($\ast$) に代入して、

$$5p^2 = (5q')^2$$

$$p^2 = 5q'^2$$

となるため、(2)より、 p は 5 の倍数なので $p = 5p'$ (p' は自然数。)と書ける。

したがって、 p, q 共に 5 を因数にもつので、互いに素であるという仮定に反する。

ゆえに、背理法により $\sqrt{5}$ が無理数であることが示された。

(証明終)