

〔1〕

(1)

$$B_1 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B_3 = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^3$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(答) \quad B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

二次の単位行列を E とすると $B_1^3 = E$ なので、自然数 m を用いて $n = 3m - 2$ と書けるとき

$$B_n = B_1^{3m-2} = B_1^{3(m-1)} B_1 = B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$n = 3m - 1$ と書けるとき

$$B_n = B_1^{3m-1} = B_1^{3(m-1)} B_1^2 = B_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$n = 3m$ と書けるとき

$$B_n = B_1^{3m} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(答) \quad B_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & (n = 3m - 2 \text{ のとき}) \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & (n = 3m - 1 \text{ のとき}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n = 3m \text{ のとき}) \end{cases}$$

[2]

- (1)
表が 3 回, 裏が 0~2 回出て, 最後に表が出ることから,
(i)裏が 0 回出た時

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- (ii)裏が 1 回出た時

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot {}_2C_1 = \frac{1}{4}$$

- (iii)裏が 2 回出た時

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot {}_3C_2 = \frac{3}{16}$$

以上から, 求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

(答) $\frac{11}{16}$

- (2)
A が負ける確率は, (1)より

$$1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$$

よって, 求める期待値は,

$$1 \cdot \frac{11}{16} + (-0.5) \cdot \frac{5}{16} = \frac{17}{32}$$

(答) $\frac{17}{32}$

- (3)
期待値 0 なので

$$1 \cdot \frac{11}{16} + x \cdot \frac{5}{16} = 0$$

$$x = -2.2$$

(答) $x = -2.2$

[3]

(1)

x, y をそれぞれ θ で微分して,

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 - \cos \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sin \theta$$

となる。

$$(答) \quad \frac{dx}{d\theta} = 2 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta$$

(2)

$|\cos \theta| \leq 1$ なので,

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 - \cos \theta > 0$$

よって x は θ についての増加関数より,

$\theta = 0$ のとき

$$\begin{aligned} x &= 2 \times 0 - \sin 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\theta = 2\pi$ のとき

$$\begin{aligned} x &= 2 \times 2\pi - \sin 2\pi \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

以上から,

$$0 \leq x \leq 4\pi$$

であることがわかる。

$$(答) \quad 0 \leq x \leq 4\pi$$

(3)

$2 - \cos \theta > 0$ であることから,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta}$$

(4)

$2 - \cos \theta > 0$ なので $\frac{dy}{dx}$ の正負は $\sin \theta$ の正負に等しい。

x は θ に関して単調に増加するため,

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, つまり $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき,

$$0 \leq \frac{dy}{dx}$$

また, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のとき, つまり $2\pi \leq x \leq 4\pi$ のとき

$$0 \geq \frac{dy}{dx}$$

より増減表は次のようになる。

x	0	...	2π	...	4π
$\frac{dy}{dx}$	0	+	0	-	0
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

$$(答) \quad 0 \leq x \leq 2\pi \text{ で増加, } 2\pi \leq x \leq 4\pi \text{ で減少}$$

(5)

$$dx = (2 - \cos \theta) d\theta$$

であり, 積分範囲は,

$$x: 0 \rightarrow 4\pi$$

$$\theta: 0 \rightarrow 2\pi$$

となることから, 求める面積を S とすると,

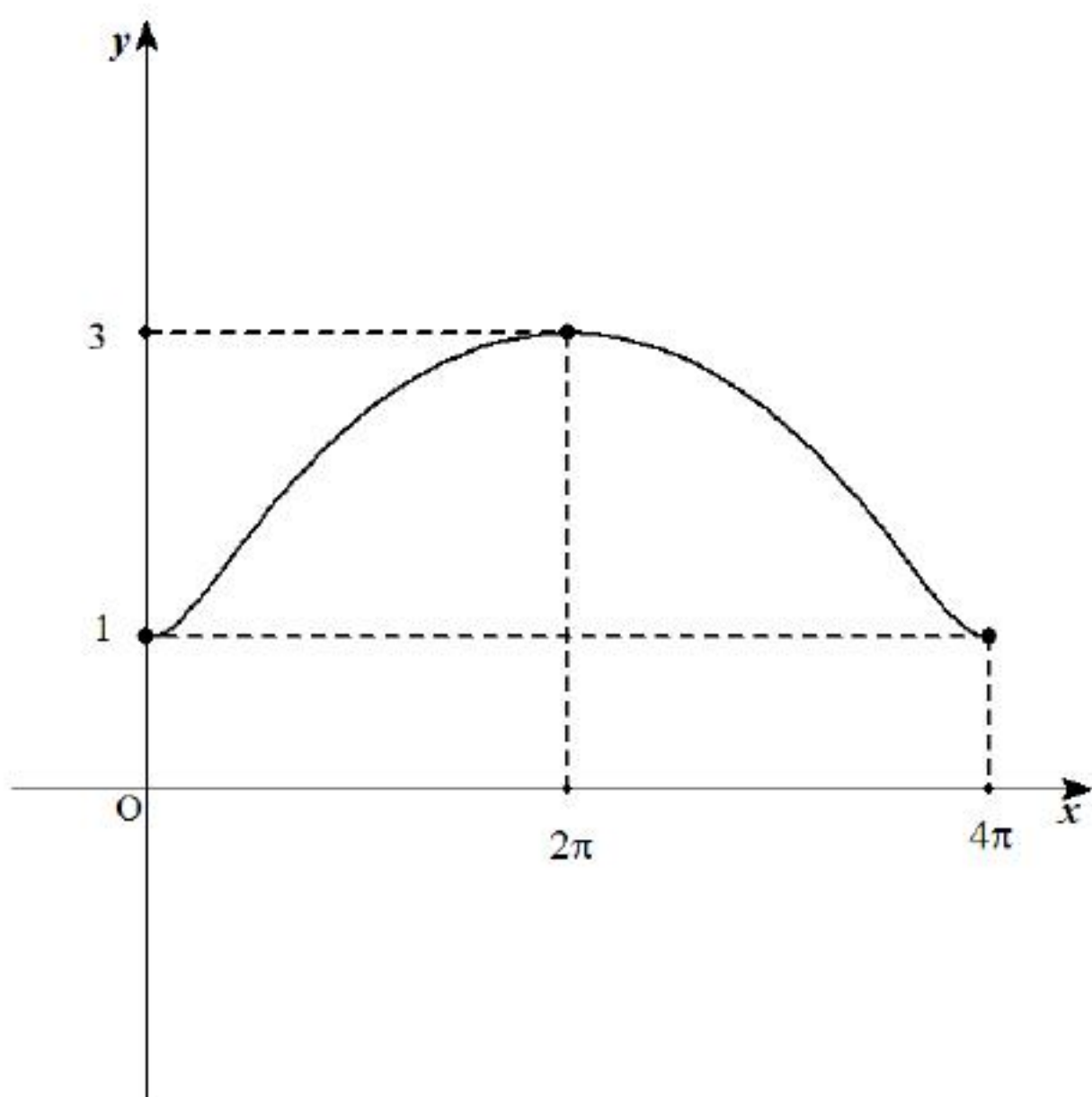
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{4\pi} y dx \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - 4\cos \theta + 4) d\theta \end{aligned}$$

ここで倍角の公式を用いて,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2} - 4\cos \theta + 4 \right) d\theta \\ &= \left[\frac{\sin 2\theta}{4} - 4\sin \theta + \frac{9}{2}\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad 9\pi$$



[4]

(1)

C_1 の Q における接線は,

$$y = 2s(x-s) + s^2$$

$$y = 2sx - s^2$$

これが P を通るので, $(x, y) = (t, at^2 + bt + c)$ を代入して

$$at^2 + bt + c = 2st - s^2$$

$$s^2 - 2ts + at^2 + bt + c = 0$$

となる。

$$(答) \quad s^2 - 2ts + at^2 + bt + c = 0$$

(2)

$$s^2 - 2ts + at^2 + bt + c = 0$$

が異なる 2 つの実数解を持てばいいので, 判別式が正になればよい。

したがって, この方程式の判別式を D とおくと,

$$\frac{D}{4} = t^2 - at^2 - bt - c > 0$$

$$(1-a)t^2 - bt - c > 0$$

$$(答) \quad (1-a)t^2 - bt - c > 0$$

(3)

(2)で求めた式が全ての t で成立することが必要である。

したがって, $1-a < 0$ ではない。

(ア) $1-a=0$ すなわち $a=1$ のとき,

$$-bt - c > 0$$

よって, $b=0$ かつ $c < 0$ であることが必要。

(イ) $1-a > 0$ ($a \neq 0$) のとき

$$(1-a)t^2 - bt - c > 0$$

$$\left\{ t - \frac{b}{2(1-a)} \right\}^2 - \frac{b^2}{4(1-a)^2} - \frac{c}{1-a} > 0$$

なので, 任意の t でこの式が成立するためには, $1-a > 0$ であることを踏まえて,

$$-\frac{b^2}{4(1-a)^2} - \frac{c}{1-a} > 0$$

$$b^2 + 4(1-a)c < 0$$

であればよいことがわかる。

$$(答) \quad \begin{cases} a=1 \text{ かつ } b=0 \text{ かつ } c < 0 \\ \text{または} \\ a < 1 \text{ } (a \neq 0) \text{ かつ } b^2 + 4(1-a)c < 0 \end{cases}$$