

[1]

(1)

数学的帰納法により示す。

(i) $n=1$ のとき

$$\frac{1}{2} \leq x_1 = 1 \leq 1$$

より成立。

(ii) $n=k$ のとき成立を仮定すると、

$$\frac{1}{2} \leq x_k \leq 1$$

であり、このとき、

$$\frac{1}{1+1} \leq x_{k+1} = \frac{1}{1+x_k} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

であり、

$$\frac{1}{2} \leq x_{k+1} \leq \frac{2}{3} < 1$$

以上から $n=k+1$ でも題意が成立するので、

全ての自然数 n において、 $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ となることが示された。

(証明終)

(2)

(i) $n=1$ のとき

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

であることから、

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= \left| \frac{1}{2} - 1 \right| \\ &= \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^0 \end{aligned}$$

となり、題意は成立する。

(ii) $n \geq 2$ のとき

(1)の結果から

$$\frac{1}{2} \leq x_n$$

なので、すべての $n \geq 2$ なる自然数 n において、

$$\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{2}{3}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left| \frac{1}{x_{n+1}+1} - \frac{1}{x_n+1} \right| \\ &= \frac{|x_n - x_{n+1}|}{|(x_{n+1}+1)(x_n+1)|} \\ &\leq \frac{4}{9} |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(\frac{4}{9} \right)^2 |x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq \left(\frac{4}{9} \right)^n |x_2 - x_1| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^n \end{aligned}$$

であり、 $n \geq 2$ の場合にも

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1}$$

が成立することが示された。

(証明終)

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ を代入して

$$\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であり、(1)の結果より、

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$$

であることを踏まえると、

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

が極限值であることがわかる。

$$(答) \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

[2]

(1)

x, y をそれぞれ θ で微分して,

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 - \cos \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sin \theta$$

となる。

(答) $\frac{dx}{d\theta} = 2 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta$

(2)

$|\cos \theta| \leq 1$ なので,

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 - \cos \theta > 0$$

よって x は θ についての増加関数より,

$\theta = 0$ のとき

$$x = 2 \times 0 - \sin 0$$

$$= 0$$

$\theta = 2\pi$ のとき

$$x = 2 \times 2\pi - \sin 2\pi$$

$$= 4\pi$$

以上から,

$$0 \leq x \leq 4\pi$$

であることがわかる。

(答) $0 \leq x \leq 4\pi$

(3)

$2 - \cos \theta > 0$ であることから,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta}$

(4)

$2 - \cos \theta > 0$ なので $\frac{dy}{dx}$ の正負は $\sin \theta$ の正負に等しい。

x は θ に関して単調に増加するため,

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, つまり $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき,

$$0 \leq \frac{dy}{dx}$$

また, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のとき, つまり $2\pi \leq x \leq 4\pi$ のとき

$$0 \geq \frac{dy}{dx}$$

より増減表は次のようになる。

x	0	...	2π	...	4π
$\frac{dy}{dx}$	0	+	0	-	0
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

(答) $0 \leq x \leq 2\pi$ で増加, $2\pi \leq x \leq 4\pi$ で減少

(5)

$$dx = (2 - \cos \theta) d\theta$$

であり, 積分範囲は,

$$x: 0 \rightarrow 4\pi$$

$$\theta: 0 \rightarrow 2\pi$$

となることから, 求める面積を S とすると,

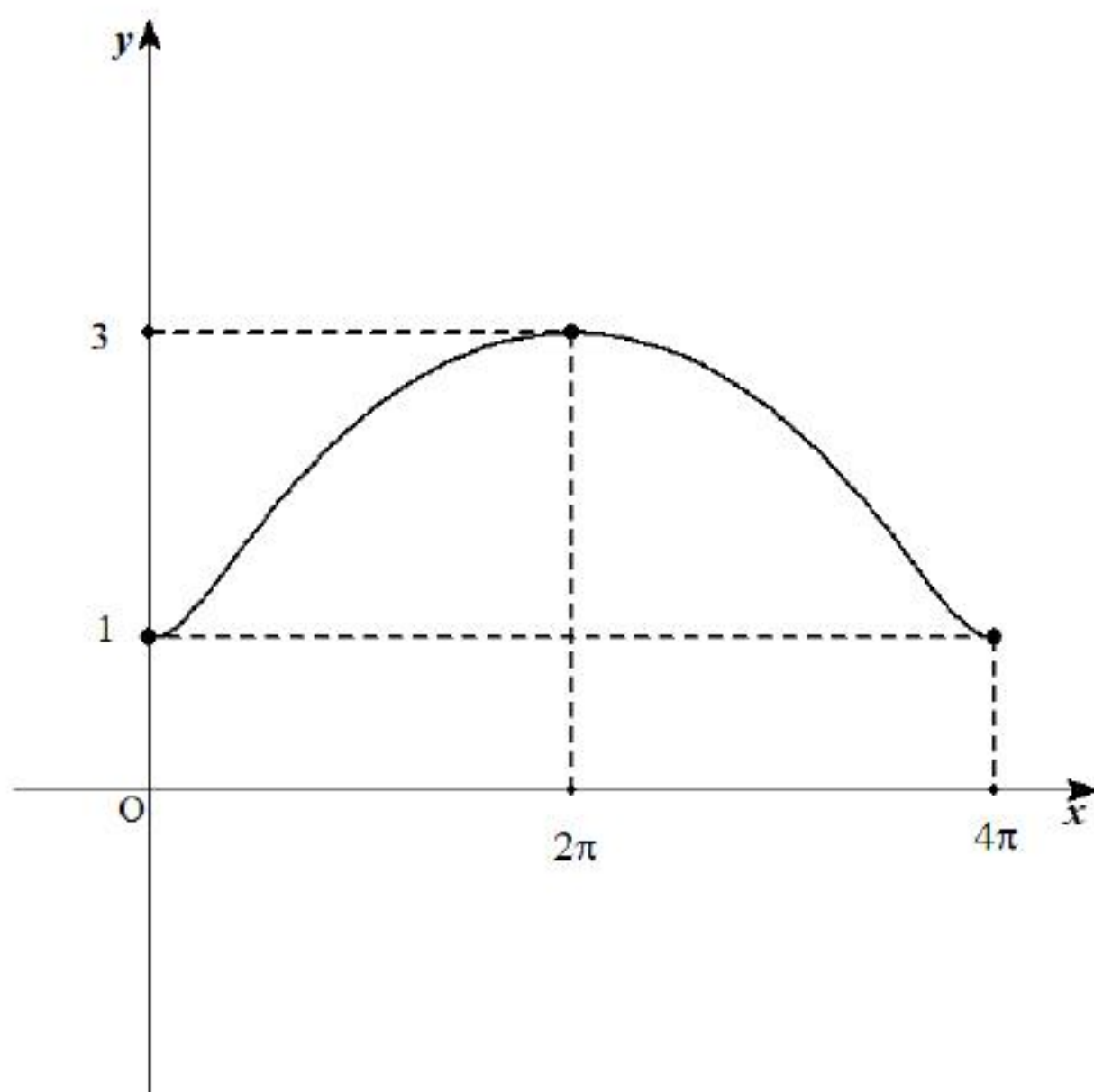
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{4\pi} y dx \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - 4\cos \theta + 4) d\theta \end{aligned}$$

ここで倍角の公式を用いて,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2} - 4\cos \theta + 4 \right) d\theta \\ &= \left[\frac{\sin 2\theta}{4} - 4\sin \theta + \frac{9}{2}\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) 9π



[3]

(1)

C_1 の Q における接線は、

$$y = 2s(x - s) + s^2$$

$$y = 2sx - s^2$$

これが P を通るので、 $(x, y) = (t, at^2 + bt + c)$ を代入して

$$at^2 + bt + c = 2st - s^2$$

$$s^2 - 2ts + at^2 + bt + c = 0$$

となる。

$$(答) \quad s^2 - 2ts + at^2 + bt + c = 0$$

(2)

$$s^2 - 2ts + at^2 + bt + c = 0$$

が異なる 2 つの実数解を持てばいいので、判別式が正になればよい。

したがって、この方程式の判別式を D とおくと、

$$\frac{D}{4} = t^2 - at^2 - bt - c > 0$$

$$(1-a)t^2 - bt - c > 0$$

$$(答) \quad (1-a)t^2 - bt - c > 0$$

(3)

(2)で求めた式が全ての t で成立することが必要である。

したがって、 $1-a < 0$ ではない。

(ア) $1-a=0$ すなわち $a=1$ のとき、

$$-bt - c > 0$$

よって、 $b=0$ かつ $c < 0$ であることが必要。

(イ) $1-a > 0$ ($a \neq 0$) のとき

$$(1-a)t^2 - bt - c > 0$$

$$\left\{ t - \frac{b}{2(1-a)} \right\}^2 - \frac{b^2}{4(1-a)^2} - \frac{c}{1-a} > 0$$

なので、任意の t でこの式が成立するためには、 $1-a > 0$ であることを踏まえて、

$$-\frac{b^2}{4(1-a)^2} - \frac{c}{1-a} > 0$$

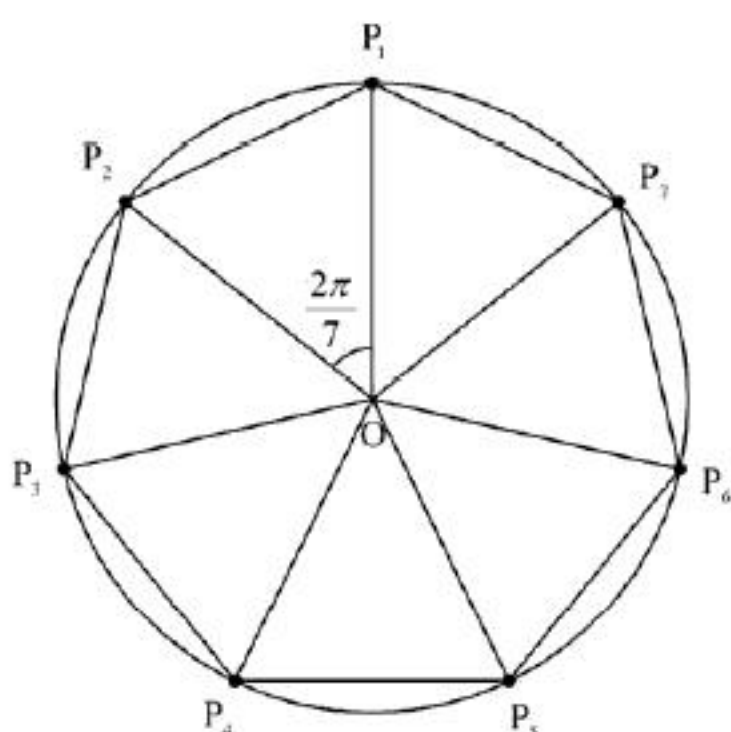
$$b^2 + 4(1-a)c < 0$$

であればよいことがわかる。

$$(答) \quad \begin{cases} a=1 \text{ かつ } b=0 \text{ かつ } c < 0 \\ \text{または} \\ a < 1 \text{ } (a \neq 0) \text{ かつ } b^2 + 4(1-a)c < 0 \end{cases}$$

[4]

(1)



三角形 OP_1P_2 の面積は、

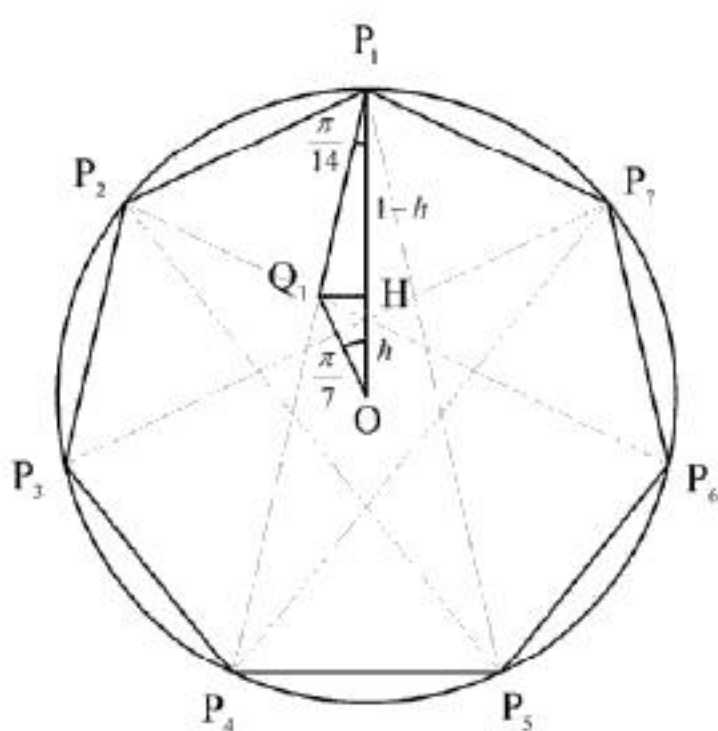
$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2} \alpha$$

より求める面積は

$$7 \times \frac{1}{2} \alpha = \frac{7}{2} \alpha$$

(答) $\frac{7}{2} \alpha$

(2)



$$OH = h, HP_1 = 1-h, HQ_1 = x$$

とおく。このとき、

$$x = OH \cdot \tan \angle HOQ_1$$

$$= P_1H \cdot \tan \angle HP_1Q_1$$

であることから、

$$x = h \tan \frac{\pi}{7} = (1-h) \tan \frac{\pi}{14}$$

ここで倍角の公式を用いると、

$$h \cdot \frac{2 \tan \frac{\pi}{14}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{14}} = (1-h) \tan \frac{\pi}{14}$$

$$h \cdot \frac{2\beta}{1-\beta^2} = (1-h)\beta$$

$$h = \frac{1-\beta^2}{3-\beta^2}$$

となることから、

$$x = (1-h)\beta$$

$$= \frac{2\beta}{3-\beta^2}$$

以上より、求める Q_1H の長さは、

$$Q_1H = \frac{2\beta}{3-\beta^2}$$

(答) $Q_1H = \frac{2\beta}{3-\beta^2}$

(3)

(2)より三角形 P_1OQ_1 の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 1 \times x = \frac{\beta}{3-\beta^2}$$

対称性から次図の灰色の図形は、三角形 P_1OQ_1 が 14 個分の面積なので

$$14 \times \frac{\beta}{3-\beta^2} = \frac{14\beta}{3-\beta^2}$$

(答) $\frac{14\beta}{3-\beta^2}$

