

平成 21 年度 入学者選抜学力検査問題

数 学 (理系 α)

数学Ⅰ, 数学A
数学Ⅱ, 数学B
数学Ⅲ, 数学C

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 解答用紙は, 4 枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気がついた場合は, 手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号, 志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に 2 箇所あります。
5. 解答は各問, 指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 解答を指定された番号以外の解答用紙に記入した場合, 採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を書いた場合, その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点 50 点は 200 点満点としたときのものです。
9. 試験終了後, 問題冊子と計算用紙は持ち帰ってください。

[1] (配点 50) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ と自然数 n に対して, $B_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n A^n$ とおく。このとき, 次の問いに答えなさい。

- (1) B_1, B_2, B_3 を求めなさい。
- (2) B_n を求めなさい。

〔2〕（配点 50） A, B の 2 人が次のようなゲームをする。1 枚の硬貨を何回か投げて表が裏よりも先に 3 回出たら A の勝ち, 反対に裏が表よりも先に 3 回出たら B の勝ちとし, ゲームを終了する。例えば, 1 回目に表, 2 回目に裏, 3 回目に表, 4 回目に表が出た場合には A の勝ちである。ゲーム終了時に, 得点として勝った者には 1 点を, 負けた者には x 点を与えることにする。このとき, 次の問いに答えなさい。

- (1) 1 回目に表が出たとする。このとき, A が勝つ確率を求めなさい。
- (2) $x = -0.5$ とし, 1 回目に表が出たとする。このとき, A の得点の期待値を求めなさい。
- (3) 1 回目に表が出たとする。このとき, A の得点の期待値が 0 点となるように x の値を定めなさい。

〔 3 〕 （配点 50） 媒介変数表示された曲線 C

$$x = 2\theta - \sin \theta, \quad y = 2 - \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

に対して、次の問いに答えなさい。

- (1) $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ を計算しなさい。
- (2) $\frac{dx}{d\theta} > 0$ であることを示し、 x がとる値の範囲を求めなさい。
- (3) 曲線 C を表す関数を $y = f(x)$ とする。 $\frac{dy}{dx}$ を θ の関数として表しなさい。
- (4) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べなさい。
- (5) 曲線 C , x 軸および 2 直線 $x = 0$, $x = 4\pi$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

[4] (配点 50) 放物線 $y = x^2$ を C_1 とし, $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実数, $a \neq 0$) を C_2 とする。このとき, 次の問いに答えなさい。

- (1) C_1 上の点 $Q(s, s^2)$ における C_1 の接線が, C_2 上の点 $P(t, at^2 + bt + c)$ を通るとする。このとき, a, b, c, s, t がみたす関係式を求めなさい。
- (2) (1)で求めた関係式を s についての 2 次方程式としてみたとき, この方程式が異なる 2 つの実数解をもつための a, b, c, t についての条件を求めなさい。
- (3) C_2 上に点 P をとり, P から C_1 へ接線を引くことを考える。 P のとり方によらず, 常に P から C_1 へ異なる 2 本の接線が引けるための a, b, c についての条件を求めなさい。