

平成 21 年度 入学者選抜学力検査問題

数 学 (理系 β)

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 解答用紙は，4 枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に 2 箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 解答を指定された番号以外の解答用紙に記入した場合，採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を書いた場合，その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点 50 点は 200 点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子と計算用紙は持ち帰ってください。

〔 1 〕 （配点 50） 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) すべての自然数 n に対して

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$$

が成り立つことを証明しなさい。

(2) すべての自然数 n に対して

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1}$$

が成り立つことを証明しなさい。

(3) 極限值

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

を求めなさい。（数列 $\{x_n\}$ が収束することは証明しなくてよい。）

〔 2 〕 （配点 50） 媒介変数表示された曲線 C

$$x = 2\theta - \sin \theta, \quad y = 2 - \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

に対して、次の問いに答えなさい。

- (1) $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ を計算しなさい。
- (2) $\frac{dx}{d\theta} > 0$ であることを示し、 x がとる値の範囲を求めなさい。
- (3) 曲線 C を表す関数を $y = f(x)$ とする。 $\frac{dy}{dx}$ を θ の関数として表しなさい。
- (4) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べなさい。
- (5) 曲線 C , x 軸および 2 直線 $x = 0$, $x = 4\pi$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

〔3〕（配点 50）放物線 $y = x^2$ を C_1 とし、 $y = ax^2 + bx + c$ （ a, b, c は実数、 $a \neq 0$ ）を C_2 とする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) C_1 上の点 $Q(s, s^2)$ における C_1 の接線が、 C_2 上の点 $P(t, at^2 + bt + c)$ を通るとする。このとき、 a, b, c, s, t がみたす関係式を求めなさい。
- (2) (1)で求めた関係式を s についての 2 次方程式としてみたとき、この方程式が異なる 2 つの実数解をもつための a, b, c, t についての条件を求めなさい。
- (3) C_2 上に点 P をとり、 P から C_1 へ接線を引くことを考える。 P のとり方によらず、常に P から C_1 へ異なる 2 本の接線が引けるための a, b, c についての条件を求めなさい。

〔 4 〕 （配点 50） 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正七角形の各頂点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ から長さが最大となる対角線を 2 本ずつ引き、それらの交点のうち $Q_1, Q_2, \dots, Q_7$ を図のように定める。また、 $\alpha = \sin \frac{2\pi}{7}$, $\beta = \tan \frac{\pi}{14}$ とする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 正七角形 $P_1P_2 \dots P_7$ の面積を α を用いて表しなさい。
- (2) 点 Q_1 から線分 P_1O へ垂線を下し、その交点を H とする。線分 Q_1H の長さを β を用いて表しなさい。
- (3) 点 $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_7, Q_7, P_1$ を順番に線分で結ぶことによって囲まれた図形(図の灰色の部分)の面積を β を用いて表しなさい。

